
marque déposée



le Calligraphe

cahier ______________________

école ______________________

classe ______________________

nom ______________________



No 103

TC2

GEOMETRIE

LEÇONS n° 1

COURS DE TERMINALE C

DE MME J. MANOTTE

(recopié et présenté par D.-J. MERCIER)

1974 - 75

23.9 1 Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels

Somme de $\vec{E}'$ et $\vec{E}''$, sous-espaces vectoriels de $\vec{E}$ sur $\mathbb{R}$.

$$\vec{S} = \vec{E}' + \vec{E}''$$

$$\vec{S} = \{ \vec{u},\ \vec{u} \in \vec{E} \ /\ \vec{u} = \underbrace{\vec{u}'}_{\in \vec{E}'} + \underbrace{\vec{u}''}_{\in \vec{E}''} \}$$

ou encore

$$\vec{S} = \{ \vec{u} \in \vec{E} \ /\ \exists \vec{u}' \in \vec{E}' ; \exists \vec{u}'' \in \vec{E}'' : \vec{u} = \vec{u}' + \vec{u}'' \}$$

$\vec{S}$ est un sous-espace de $\vec{E}$.

* $\vec{0} \in \vec{S}$ (voir $\vec{0} = \underbrace{\vec{0}}_{\in \vec{E}'} + \underbrace{\vec{0}}_{\in \vec{E}''}$) donc $\vec{S} \neq \emptyset$

* Soit $\vec{u} \in \vec{S}$: $\vec{u} = \vec{u}' + \vec{u}''$ $\quad \vec{u}' \in \vec{E}', \vec{u}'' \in \vec{E}''$

  $\vec{v} \in \vec{S}$: $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}''$ $\quad \vec{v}' \in \vec{E}', \vec{v}'' \in \vec{E}''$

  $$\vec{u} + \vec{v} = \underbrace{(\vec{u}' + \vec{v}')}_{\in \vec{E}'} + \underbrace{(\vec{u}'' + \vec{v}'')}_{\in \vec{E}''}$$

  , car + est interne dans $\vec{E}'$

  " + " " $\vec{E}''$

  $$\vec{u} + \vec{v} = \underbrace{\vec{w}_1}_{\in \vec{E}'} + \underbrace{\vec{w}_2}_{\in \vec{E}''} \quad \leftarrow \quad \vec{u} + \vec{v} \in \vec{S}$$

* $\forall \vec{u} \in \vec{S}$: $\vec{u} = \vec{u}' + \vec{u}''$

  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \vec{u} \in \vec{S}$? (stabilité externe).

  opérateur. $$\lambda \vec{u} = \underbrace{\lambda \vec{u}'}_{\in \vec{E}'} + \underbrace{\lambda \vec{u}''}_{\in \vec{E}''}$$

$$\lambda \vec{u} = \underbrace{\vec{w}'}_{\in \vec{E}'} + \underbrace{\vec{w}''}_{\in \vec{E}''}$$

$\lambda \vec{u} \in \vec{S}$

Remarque

Soit $\vec{E}_i$ un sous-espace de $\vec{E}$ contenant $\vec{E}'$ et $\vec{E}''$ (donc $\vec{E}' \cup \vec{E}''$); alors $\vec{S} = \vec{E}' + \vec{E}''$ est contenu dans tout E_i

$\vec{u} = \vec{u}' + \vec{u}'' \in \vec{E}_i$?

Oui car $\vec{u}' \in \vec{E}' \subset \vec{E}_i$ $\qquad \vec{u}'' \in \vec{E}'' \subset \vec{E}_i$

$\vec{u}' \in \vec{E}_i \qquad \vec{u}'' \in \vec{E}_i$

$\vec{u}' + \vec{u}'' \in \vec{E}_i$ (+ interne dans $\vec{E}_i$)

On dit que $\vec{S}$ est "le plus petit" des sous-espaces de $\vec{E}$ contenant $\vec{E}' \cup \vec{E}''$

Somme directe

Si et seulement si $\vec{E}' \cap \vec{E}'' = \{\vec{0}\}$

$\vec{S}$ est directe :

1°/ $\vec{S} = \{\vec{u} \in \vec{E} \,/\, \vec{u} = \underbrace{\vec{u}'}_{\in \vec{E}'} + \underbrace{\vec{u}''}_{\in \vec{E}''}\}$

2°/ $\vec{E}' \cap \vec{E}'' = \{\vec{0}\}$

On note $\vec{S} = \vec{E}' \oplus \vec{E}''$

Propriété

* $\forall \vec{u} \in \vec{S}$ (directe), $\vec{u} = \vec{u}' + \vec{u}''$ lorsqu'on l'a trouvée, est une décomposition de $\vec{u}$ unique.

En effet, si $\vec{u} = \underbrace{\vec{u}'}_{\in \vec{E}'} + \underbrace{\vec{u}''}_{\in \vec{E}''} = \underbrace{\vec{v}'}_{\in \vec{E}'} + \underbrace{\vec{v}''}_{\in \vec{E}''}$,

alors $\vec{u}' - \vec{v}' = \vec{v}'' - \vec{u}''$

$$\vec{u}' + \underbrace{(-\vec{v}')}_{\in \vec{E}'} = \vec{v}'' + \underbrace{(-\vec{u}'')}_{\in \vec{E}''}$$

$$\vec{w}' = \vec{w}''$$

Les 2 vecteurs $\vec{w}'$ et $\vec{w}''$ sont égaux ; c'est donc du même vecteur qu'il s'agit. Il appartient à $\vec{E}'$ et à $\vec{E}''$, c'est donc le vecteur nul. Donc $\begin{cases} \vec{u}' = \vec{v}' \\ \vec{u}'' = \vec{v}'' \end{cases}$

$\exists! \ \vec{u}' + \vec{u}''$, décomposition de $\vec{u}$.

* Réciproque :

Si $\vec{S} = \vec{E}' + \vec{E}''$, et si, de plus, $\forall \vec{u} \in \vec{S}$, ∃!

$\exists! \ \vec{u} = \underbrace{\vec{u}'}_{\in \vec{E}'} + \underbrace{\vec{u}''}_{\in \vec{E}''}$ (décomposition unique)

Alors $\vec{S} = \vec{E}' \oplus \vec{E}''$

En effet, si $\vec{u} \in \vec{E}' \cap \vec{E}''$, comme l'intersection de 2 sous-espaces est un sous-espace, alors $\vec{0}$ et $-\vec{u}$ $\in \vec{E}' \cap \vec{E}''$

Alors $\vec{O} = \underbrace{\vec{u}}_{\in \vec{E}'} + \underbrace{(-\vec{u})}_{\in \vec{E}''}$

Cette décomposition du vecteur nulle devant être unique et étant connue d'avance : $\vec{O} = \underbrace{\vec{O}}_{\in \vec{E}'} + \underbrace{\vec{O}}_{\in \vec{E}''}$,

on a nécessairement $\vec{u} = \vec{O}$ et $\vec{E}' \cap \vec{E}'' = \{\vec{O}\}$

Sous-espaces supplémentaires dans $\vec{E}$

3 choses $\left\{ \begin{array}{l} \vec{E}' ; \vec{E}'' \text{ 2 sous-espaces de } \vec{E} \\ \vec{E}' \oplus \vec{E}'' = \vec{E} \end{array} \right.$

On dit : ou bien que $\vec{E}'$ et $\vec{E}''$ sont supplémentaires dans $\vec{E}$, ou bien que $\vec{E}'$ est un supplémentaire de $\vec{E}'$ dans $\vec{E}$.

Dimensions de $\vec{E}'$ et $\vec{E}''$ supplémentaires dans $\vec{E}$

Si $\vec{E}$ de dimension finie n.

Si $\vec{E}'$ et $\vec{E}''$ sont propres, alors :

$\exists$ base de $\vec{E}' = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_p\}$

$\exists$ " $\vec{E}'' = \{\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2, \dots, \vec{\eta}_q\}$ (η : êta.)

Soit la famille $\mathcal{F} = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p, \vec{\eta}_1, \dots, \vec{\eta}_q\}$

24.9 * $\mathcal{F}$ est génératrice de $\vec{E}$:

$\forall \vec{u} \in \vec{E}, \quad \vec{u} = \vec{u}' + \vec{u}''$

$\vec{u}' \in \vec{E}' \vdash \quad \vec{u}' = \sum_{i=1}^{p} x_i \vec{e}_i$

$\vec{u}'' \in \vec{E}''$ $\quad \vec{u}'' = \sum_{i=1}^{q} y_i \cdot \vec{\eta}_i$

$\vec{u} = \sum_{i=1}^{p+q} \lambda_i \, \vec{\omega}_i \quad , \vec{\omega}_i \in \mathcal{F} \quad , \lambda_i \in \mathbb{R}$

* $\mathcal{F}$ est une partie libre de $\vec{E}$:

$\sum_{i=1}^{p+q} \lambda_i \, \vec{\omega}_i = \vec{0} \vdash \lambda_i = 0 \ , \forall i \in [1, p+q] \cap \mathbb{N}$?

$\vec{0} = \sum_{i=1}^{p} x_i \, \vec{e}_i + \sum_{i=1}^{q} y_i \, \vec{\eta}_i$

Cette décomposition est unique :

$\vec{0} = \vec{0} + \vec{0}$

$\sum_{i=1}^{p} x_i \vec{e}_i = \vec{0} = \sum_{i=1}^{q} y_i \, \vec{\eta}_i$

Tous les x_i sont nuls (voir base des $\vec{e}_i$), tous les y_i sont nuls (voir base des $\vec{\eta}_i$).

$\forall i \in [1, p+q] \ , \ \lambda_i = 0$

$\mathcal{F}$ est libre.

$\mathcal{F}$ est une base de $\vec{E}$.

$\exists \ p+q$ vecteurs dans $\mathcal{F}$.

$\dim \vec{E} = p+q \vdash n = p+q$

$$\dim E = \dim E' + \dim E''$$

25.9 2 Applications linéaires.

Généralités

f linéaire : $\vec{E}$ = espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$.
$\vec{F}$ = " "

$f : \vec{E} \longrightarrow \vec{F}$

α) f est un homomorphisme de $(E,+)$ vers $(F,+)$:
$\forall (\vec{u},\vec{v}) \in E^2 , \quad f(\vec{u}+\vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$

β)
$\forall \lambda \in \mathbb{R} , \forall \vec{u} \in E , \quad f(\lambda.\vec{u}) = \lambda . f(\vec{u})$
ce qui traduit un homomorphisme de $(E,.)$ vers $(F,.)$.

On dit que f est un homomorphisme d'espaces vectoriels.

Remarque

En général : $(E,*) \xrightarrow{f} (F,T)$
$\forall (a,b) \in E^2 ; f(a*b) = f(a)\ T\ f(b)$
f est alors un homomorphisme de $(E,*)$ vers (F,T).

* Si $\vec{F} = \vec{E}$ et si l'opération interne est la même, alors f est dite "endomorphisme".

* Si $\vec{E} \neq \vec{F}$ et si f bijective, alors f est un "isomorphisme".
* Si $\vec{E} = \vec{F}$ et si + interne est la même, et si f est bijective, l'endomorphisme bijectif est dit : "automorphisme".

Nf ou Ker f est le noyau de f linéaire de E vers F

$N_f = \{\vec{u} \in \vec{E} , f(\vec{u}) = \vec{0}_F\}$

Nf est un sous-espace vectoriel de E

* $N_f \neq \emptyset$ car $\vec{0}_E \in N_f$.
* $\forall \vec{u} \in N_f , f(\vec{u}) = \vec{0}_F$

$\forall \vec{v} \in N_f , f(\vec{v}) = \vec{0}_F$

$f(\vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v}) = \vec{0}_F$

$\vec{u} + \vec{v} \in N_f$

Nf est stable pour +.

* $\forall \lambda \in \mathbb{R} , \forall \vec{u} \in N_f$

$f(\lambda \vec{u}) = \lambda f(\vec{u}) = \lambda . \vec{0}_F = \vec{0}_F$

$\lambda . \vec{u} \in N_f$

Nf est stable pour .

Image de $\vec{E}$ par f.

$\text{Im} f = f(\vec{E})$ est l'image de $\vec{E}$ par f

appl. linéaire surjective : $\text{Im} f = \vec{F}$
injective : $N f = \{\vec{0}\}$

$$f(\vec{E}) = \{ \vec{v}, \vec{v} \in \vec{F} \,/\, \boxed{\exists \vec{u}}, \vec{u} \in \vec{E} : f(\vec{u}) = \vec{v} \}$$

$f(\vec{E})$ est un sous-espace vectoriel de F.

* $f(\vec{E}) \neq \emptyset$ car $\vec{0}_F \in f(\vec{E})$

$f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$

* $\forall (\vec{v}, \vec{v}') \in [f(\vec{E})]^2$

$\vec{v} + \vec{v}' \in f(\vec{E})$?

$\exists \vec{u} \,/\, \vec{u} \in \vec{E}, \; f(\vec{u}) = \vec{v}$

$\exists \vec{u}' \,/\, \vec{u}' \in \vec{E}, \; f(\vec{u}') = \vec{v}'$

$\underline{\vec{v} + \vec{v}'} = f(\vec{u}) + f(\vec{u}') = \underline{f(\vec{u} + \vec{u}')}$

$\exists (\vec{u} + \vec{u}') \in \vec{E} \,/\, f(\vec{u} + \vec{u}') = \vec{v} + \vec{v}'$

$\vec{v} + \vec{v}' \in f(E)$, lequel est donc stable pour +.

* $\vec{v} \in f(\vec{E})$

$\lambda \vec{v} \in f(\vec{E})$?

4.10 $\vec{v} \in f(\vec{E}) \longmapsto \exists \vec{u} \in \vec{E} \,/\, f(\vec{u}) = \vec{v}$

Or, $\lambda \vec{v} = \lambda f(\vec{u}) = f(\underbrace{\lambda \vec{u}}_{\in \vec{E}})$

$\exists \lambda \vec{u} \in \vec{E} \,/\, f(\lambda \vec{u}) = \lambda \vec{v}$ oui $\lambda \vec{v} \in f(\vec{E})$.

Donc, $f(\vec{E})$ est stable pour .

Comparaison des dimensions de N_f, $f(\vec{E})$, $\vec{E}$.

1°/ "Par une bijection, la dimension est conservée".

* Par exemple : $\vec{E}$ de dim 3.

$\forall \vec{u} \in \vec{E}$, $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

f linéaire : $\underbrace{f(\vec{u})}_{\in f(\vec{E})} = x\underbrace{f(\vec{i})}_{\vec{i}'} + y\underbrace{f(\vec{j})}_{\vec{j}'} + z\underbrace{f(\vec{k})}_{\vec{k}'}$

$\{\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'\}$ est une partie génératrice de $f(\vec{E})$; pas nécessairement une partie libre. Donc peut-être pas une base de $f(\vec{E})$.

Une base de $f(\vec{E})$ devra donc renfermer 3 (ou moins) éléments.

La dimension de $f(E)$ est $\leq$ à dim E. $\dim \underbrace{f(E)}_{F} \leq \dim E$

Si f est bijective de E vers F, alors $f(E) = F$, et $\exists f^{-1}$ de F sur E. Donc $\dim E \leq \dim \underbrace{F}_{f(E)=F}$

Donc $\dim E = \dim F$

2°/ Soit $\vec{E}'$ un sous-espace supplémentaire de N_f dans E.

Donc $\dim \vec{E}' + \dim N_f = \dim \vec{E}$

On va montrer que f', restriction de f à E', est

Bijective :

$$f' : \vec{E}' \longrightarrow f(\vec{E})$$
$$\vec{y} \longmapsto f'(\vec{y}) = f(\vec{y})$$

* f' est surjective :

$\forall \vec{v} \in f(\vec{E})$, $\exists \vec{u} \in \vec{E}$ / $f(\vec{u}) = \vec{v}$

Or $\vec{u} = \vec{x} + \vec{y}$ $\quad \vec{x} \in N_f$ et $\vec{y} \in \vec{E}'$

$\vec{v} = \underbrace{f(\vec{x})}_{\vec{0}} + f(\vec{y}) = f(\vec{y})$

$\vec{v} = f'(\vec{y})$, $\exists \vec{y} \in \vec{E}' / \vec{v} = f'(\vec{y})$

* f' est injective :

$f(\vec{y}) = f(\vec{y}_1)$ $\quad \vec{y} \in \vec{E}'$, $\vec{y}' \in \vec{E}'$

$f(\underbrace{\vec{y} - \vec{y}_1}_{\in N_f}) = \vec{0}$

De plus, $\vec{y} \in \vec{E}'$ et $\vec{y}_1 \in \vec{E}'$ donc $\vec{y} + (-\vec{y}_1) \in \vec{E}'$ (sous-espace).

$\vec{y} - \vec{y}_1 \in \vec{E}' \cap N_f$

$\vec{y} - \vec{y}_1 = \vec{0} \vdash \vec{y} = \vec{y}_1$

$f'(\vec{y}) = f'(\vec{y}_1) \vdash \vec{y} = \vec{y}_1$

Σ

$$\dim Nf + \dim f(\vec{E}) = \dim \vec{E}$$

~~16.10~~

16.10 3 Structures

Préliminaires. $(B, \circ) = (GL(E), \circ)$ groupe

On appelle "transformation" de E une application bijective de E dans lui-même.

Soit B = ens. des transformations de E.

$(B, \circ)$ = groupe.

* $\forall f \in B,\ \forall g \in B,\ g \circ f \in B$

Remarque $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

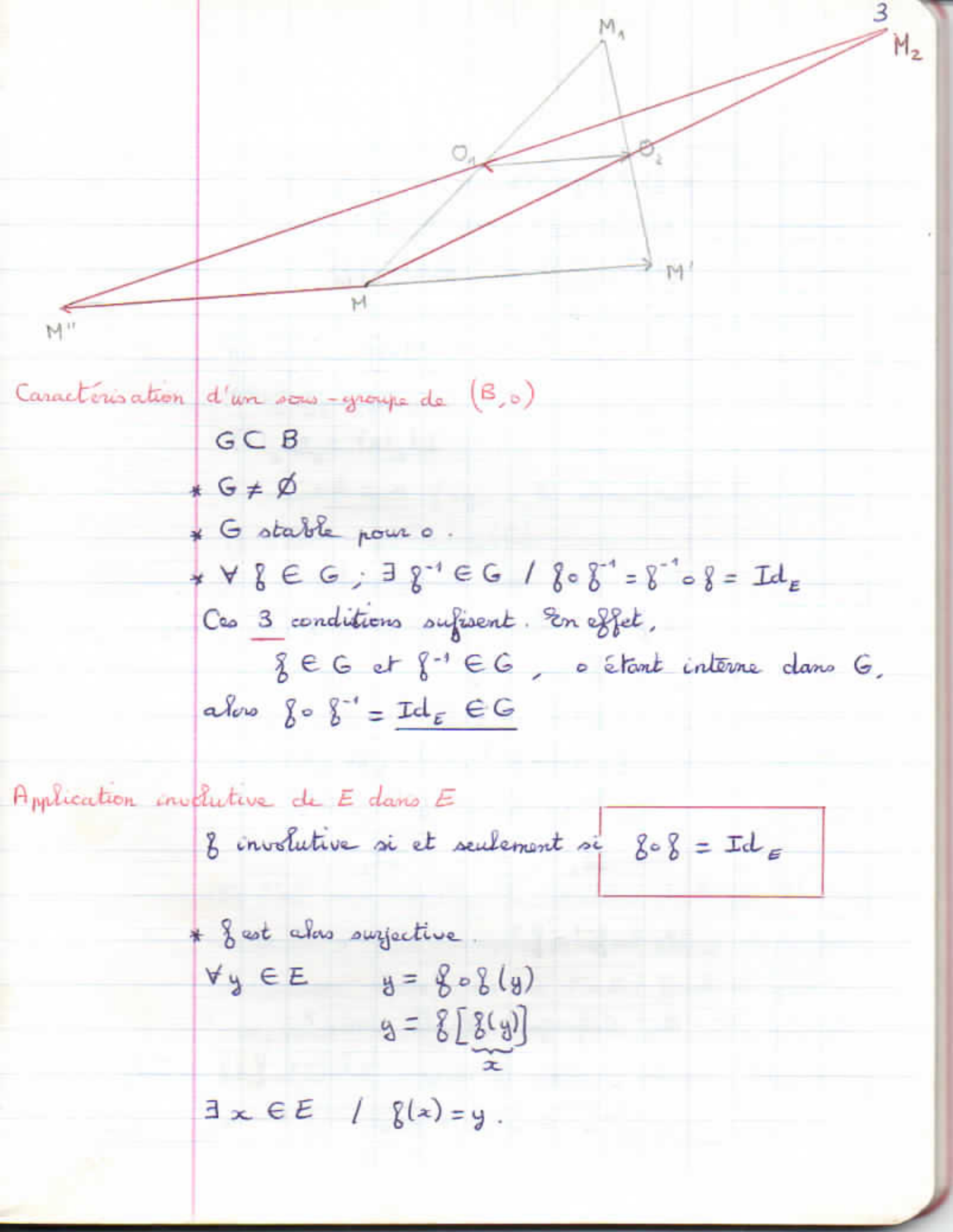
* L'opération $\circ$ est associative.
* $\exists\, Id_E \in B \,/\, \forall f \in B,\ f \circ Id_E = Id_E \circ f = f$
* $\forall f \in B,\ \exists\, f^{-1} \in B \,/\, f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = Id_E$
* L'opération $\circ$ n'est pas commutatif :

non $(\forall (f, g) \in B^2,\ f \circ g = g \circ f)$

donc : $\exists (f, g) \in B^2 \,/\, f \circ g \neq g \circ f$

exemple : $\left.\begin{array}{l} S_2 \circ S_1 = T \\ S_1 \circ S_2 = T' \end{array}\right\} T \neq T'$

$T_{2\overrightarrow{O_1O_2}} \neq T'_{2\overrightarrow{O_2O_1}}$



Caractérisation d'un sous-groupe de $(B, \circ)$

$G \subset B$

* $G \neq \emptyset$
* G stable pour $\circ$.
* $\forall f \in G \,;\, \exists f^{-1} \in G \;/\; f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = Id_E$

Ces 3 conditions sufisent. En effet,

$f \in G$ et $f^{-1} \in G$, $\circ$ étant interne dans G,

alors $f \circ f^{-1} = \underline{Id_E \in G}$

Application involutive de E dans E

f involutive si et seulement si $\boxed{f \circ f = Id_E}$

* f est alors surjective.

$\forall y \in E \qquad y = f \circ f(y)$

$y = f[\underbrace{f(y)}_{x}]$

$\exists x \in E \;/\; f(x) = y$.

* f est injective.

$f(a) = f(b) \longmapsto a = b$?

$\underbrace{f(a)}_{a'} = \underbrace{f(b)}_{b'} \longmapsto f(a') = f(b')$

$a' \in E \quad b' \in E$

$$f[f(a)] = f[f(b)]$$
$$f \circ f(a) = f \circ f(b)$$
$$Id_E(a) = Id_E(b)$$
$$a = b$$

Donc f est une transformation de E.

$\exists f^{-1} \in B\ f : f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = Id_E$

Or, $f \circ f = Id_E$

$$f \circ f^{-1} = f \circ f$$
$$f^{-1}(f \circ f^{-1}) = f^{-1}(f \circ f)$$
$$\underbrace{(f^{-1} \circ f)}_{Id_E} \circ f^{-1} = \underbrace{(f^{-1} \circ f)}_{Id_E} \circ f$$

$$f^{-1} = f$$

La réciproque est-elle vraie?

Si $f^{-1} = f$, est-ce que, alors, $f \circ f = Id_E$?

$f \circ f^{-1} = f \circ f = Id_E$ oui.

$(\mathscr{L}(E), +, \cdot)$ espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ $(\mathcal{M}, +, \cdot)$ espace vect. sur $\mathbb{R}$

$(\mathscr{L}(E), +, \circ)$ anneau unitaire $(\mathcal{M}, +, \times)$ anneau unitaire.

$(GL(E), \circ)$ groupe non commutatif

$$f^2 = Id_E \longmapsto f^{-1} = f$$ (f involutive).

Structure d'espace vectoriel pour l'ensemble des applications linéaires de E vers F

1°/ $\forall f$ appl. lin. de E vers F.

$\forall g$ " "

On montre que $f+g$ a le même caractère.

$(f+g)(\vec{u}) = f(\vec{u}) + g(\vec{u})$

Soit A l'ensemble considéré.

$(A, +)$ = groupe commutatif.

2°/ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall f \in A$, $\lambda . f \in A$.

$(\lambda . f)(\vec{u}) = \lambda . f(\vec{u})$

On montre les 4 propriétés classiques, donc :

$(A, +, .)$ espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Si l'on veut enrichir la structure de A par l'introduction de la loi $\circ$ par exemple, on est obligé de le faire uniquement dans le cas où F=E, faute de quoi on composerait des applications linéaires telles que les ensembles de départ et d'arrivée seraient tous différents.

ex : $f : E \to F$

$g : F \to G$

$g \circ f : E \to G$

Donc reprenons les f de E dans E et appelons $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble qui, ci-dessus, était A.

1°/ $(\mathcal{L}(E), +, .)$: espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

2°/ $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$: anneau unitaire non commutatif.

$f : E \to E$

$g : E \to E$

$g \circ f : E \to E$

17.10 L'opération $\circ$, interne dans $\mathcal{L}(E)$ est associative.

De plus, $\circ$ est distributive sur + (à g. et à dr.)

Enfin, $\exists ! \, Id_E \ / \ \forall f \in \mathcal{L}(E), \ f \circ Id_E = Id_E \circ f = f$

$(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ anneau unitaire non commutatif.

Groupe linéaire de $E = GL(E)$

$GL(E) \subset \mathcal{L}(E)$

$\forall f \in GL(E)$, f est une transformation de E

$\exists f^{-1} \in GL(E) \ / \ f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = Id_E$

$Id_E \in GL(E)$

On rappelle que $\circ$ est associative $\forall f, g, h$

$\circ$ n'est pas commutative

$(GL(E), \circ)$ = groupe non commutatif.

Remarque : f_0, dite "application nulle" de E dans E, n'est pas élément de $GL(E)$:

$$f_0 : E \longrightarrow E$$
$$\vec{u} \longrightarrow f_0(\vec{u}) = \vec{0}_E$$
$$\vec{v} \longrightarrow f_0(\vec{v}) = \vec{0}_E$$

$(GL(E), +) \neq$ groupe

Remarque

Les éléments de $GL(E)$ sont les automorphismes de E. (cf. 8)

Homothéties vectorielles.

$$h_\alpha : E \longrightarrow E$$
$$\vec{u} \longmapsto h_\alpha(\vec{u}) = \alpha.\vec{u} \ ; \ \alpha \neq 0$$

α : rapport de l'homothétie.

1°/ h_α applique E dans E

2°/ h_α linéaire :

$$\left.\begin{array}{l} * h(\vec{u}+\vec{v}) = \alpha(\vec{u}+\vec{v}) \\ h(\vec{u}) + h(\vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v} \end{array}\right\} h(\vec{u}+\vec{v}) = h(\vec{u}) + h(\vec{v})$$

* $h(\lambda\vec{u}) = \alpha(\lambda\vec{u})$
  $\lambda\, h(\vec{u}) = \lambda . \alpha\vec{u}$ $\Big\}$ $h(\lambda\vec{u}) = \lambda . h(\vec{u})$

3°/ h_α est bijective :

$\exists\, h_{\frac{1}{\alpha}} : E \longrightarrow E$
$\vec{v} \longrightarrow h_{\frac{1}{\alpha}}(\vec{v}) = \frac{1}{\alpha}\vec{v}$

$h_\alpha \circ h_{\frac{1}{\alpha}} = h_{\frac{1}{\alpha}} \circ h_\alpha = Id_E$

$\forall \vec{u} \in E$,

$h_\alpha \circ h_{\frac{1}{\alpha}}(\vec{u}) = h_\alpha\left[h_{\frac{1}{\alpha}}(\vec{u})\right]$

$= h_\alpha\left(\frac{\vec{u}}{\alpha}\right)$

$= \vec{u}$

Donc $h_\alpha \in GL(E)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}^*$

On appelle $\mathcal{H}$ l'ensemble des homothéties de E.

$\mathcal{H} \subset GL(E)$

$(\mathcal{H}, \circ)$: sous-groupe commutatif de $GL(E)$

* $\circ$ interne dans $\mathcal{H}$
* $\circ$ associative dans $\mathcal{H}$
* $Id_E \in \mathcal{H}$ et $Id_E(\vec{u}) = 1\,\vec{u}$

* $h_{\frac{1}{\alpha}} \in \mathcal{H}$ et $h_{\frac{1}{\alpha}} = (h_\alpha)^{-1}$

* $h_\alpha \circ h_\beta = h_\beta \circ h_\alpha$?

$h_\alpha \circ h_\beta (\vec{u}) = h_\alpha [h_\beta(\vec{u})] = h_\alpha(\beta\vec{u}) = \alpha.(\beta\vec{u})$
$= \alpha\beta\vec{u}$

$h_\beta \circ h_\alpha (\vec{u}) = h_\beta [h_\alpha(\vec{u})] = h_\beta(\alpha\vec{u}) = \beta(\alpha\vec{u})$
$= \beta\alpha\vec{u}$

Nous voyons que $h_\alpha \circ h_\beta = h_\beta \circ h_\alpha$

$\circ$ est commutative dans $\mathcal{H}$

$(\mathcal{H}, \circ)$ = sous-groupe commutatif de $GL(E)$

Propriété particulière :

$\forall h \in \mathcal{H}$, $\forall f \in GL(E)$,

$h \circ f = f \circ h$

$\forall \vec{u} \in E$,

$(h \circ f)(\vec{u}) = h[f(\vec{u})] = \alpha f(\vec{u})$

$(f \circ h)(\vec{u}) = f[h(\vec{u})] = f(\alpha\vec{u}) = \alpha f(\vec{u})$.

Toute homothétie vectorielle de $\vec{E}$ commute avec toute bijection linéaire de $\vec{E}$, et même avec tout endomorphisme de $\vec{E}$.

$(f_0 \notin GL(E))$

Si on adjoint à $\mathcal{H}$, f_0, on forme alors $\mathcal{H} \cup \{f_0\}$

On se demande si ce nouvel ensemble munis de + et de $\circ$ est un corps.

Il suffit de vérifier :

1°/ $\forall$ ~~x~~ $f \in \mathcal{H} \cup \{f_0\}$, $\forall g \in \mathcal{H} \cup \{f_0\}$

$f + g \in \mathcal{H} \cup \{f_0\}$?

* $(h_\alpha + f_0)(\vec{u}) = h_\alpha(\vec{u}) + f_0(\vec{u})$
$= h_\alpha(\vec{u})$

$h_\alpha + f_0 = h_\alpha$

* $f_0 + f_0 = f_0$

* $(h_\alpha + h_\beta)(\vec{u}) = \alpha \vec{u} + \beta \vec{u}$
$= (\alpha + \beta) \vec{u}$

* $h_\alpha + h_\beta = h_{\alpha+\beta}$ si et seulement si $\alpha + \beta \neq 0$
$h_\alpha + h_\beta = f_0$ " " $\alpha = -\beta$

Oui, $f + g \in \mathcal{H} \cup \{f_0\}$

2°/ $\forall h_\alpha \in \mathcal{H}$, $\exists h_{-\alpha} \in \mathcal{H}$

$h_\alpha + h_{-\alpha} = h_{-\alpha} + h_\alpha = f_0$

Pour f_0, $\exists -f_0^{**} = f_0$ / $f_0 + f_0 = f_0$

$\{\mathcal{H} \cup \{f_0\}, +, \circ\}$ = corps commutatif.

18.10

Un isomorphisme (de groupes) : $\varphi : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{R}^*$

$$h_\alpha \longmapsto \alpha = \varphi(h_\alpha)$$

$$h_\beta \longmapsto \beta = \varphi(h_\beta)$$

$$h_\beta \circ h_\alpha \longmapsto \alpha\beta = \varphi(h_\beta \circ h_\alpha)$$

$$\boxed{\varphi(h_\beta \circ h_\alpha) = \varphi(h_\beta) \times \varphi(h_\alpha)}$$

φ est un homomorphisme de $(\mathcal{H}, \circ)$ vers $(\mathbb{R}^*, \times)$.

De plus, φ est bijective :

$\forall \alpha \in \mathbb{R}^* \quad \exists\, h_\alpha \in \mathcal{H}$

h_α est unique.

23.10 4

Automorphismes involutifs de E, espace vectoriel sur $\mathbb{R}$

$s : E \longrightarrow E$

et $s \circ s = Id_E$

Remarque : un endomorphisme involutif étant bijectif est alors nécessairement un automorphisme.

$\forall \vec{x} \in E$, $s(\vec{x}) = \text{image} \in E$

Introduisons $\vec{y} = \frac{1}{2}(\vec{x} + s(\vec{x})) \quad \in E$

$\vec{z} = \frac{1}{2}(\vec{x} - s(\vec{x})) \quad \in E$

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{x} &= \vec{y} + \vec{z} \\ s(\vec{x}) &= \vec{y} - \vec{z} \end{aligned}}$$

Les 2 relations ci-dessus sont vraies $\forall \vec{x} \in \vec{E}$ et en particulier pour $\vec{y}$ et $\vec{z}$.

$$\left\{\begin{aligned} \vec{y} &= \vec{y} + \vec{0} \\ s(\vec{y}) &= \vec{y} - \vec{0} \end{aligned}\right\} \underline{s(\vec{y}) = \vec{y}}$$

$$\left.\begin{aligned} \vec{z} &= \vec{0} + \vec{z} \\ s(\vec{z}) &= \vec{0} - \vec{z} \end{aligned}\right\} \underline{s(\vec{z}) = -\vec{z}}$$

Les $\vec{y}$ sont invariants.

Les $\vec{z}$ sont transformés en leurs opposés par s

<u>Inversement</u> : tout vecteur invariant est un vecteur $\vec{y}$:

$s(\vec{x}) = \vec{x} \vdash \vec{y} + \vec{z} = \vec{y} - \vec{z}$

$$2\vec{z} = \vec{0} \vdash \vec{z} = \vec{0} \vdash \vec{x} = \vec{y}$$

Un transformé par s en son opposé est nécessairement un $\vec{z}$.

$s(\vec{x}) = -\vec{x} \vdash \vec{y} - \vec{z} = -\vec{y} - \vec{z}$

$$\vec{y} = \vec{0} \vdash \vec{x} = \vec{z}$$

L'ensemble des $\vec{y}$ = ensemble des invariants par s.

L'ensemble des $\vec{z}$ = ensemble des transformés par s en leurs opposés.

Le premier sera nommé E'.

Le second " " E''.

$$\left.\begin{array}{l} \forall \vec{x} \in E,\ \vec{x} = \vec{y} + \vec{z} \\ \vec{y} \in E',\ \vec{z} \in E'' \end{array}\right\} \vdash E = E' + E''.$$

On montre facilement que E' ensemble des invariants et E'' ensemble des $\vec{z}$ / $s(\vec{z}) = -\vec{z}$, sont des <u>espaces vectoriels</u>.

La somme ci-dessus est-elle directe ?

oui si et seulement si : $E' \cap E'' = \{\vec{0}\}$

$\vec{x} \in E' \cap E'' \longmapsto \begin{cases} s(\vec{x}) = \vec{x} \\ \text{et } s(\vec{x}) = -\vec{x} \end{cases}$

$\vec{x} = -\vec{x}$

$2\vec{x} = \vec{0} \;\longmapsto\; \vec{x} = \vec{0}$

oui, la somme est directe :

$E = E' \oplus E''$

Réciproquement, si nous avons réussi a mettre E sous la forme $E = E' \oplus E''$

Si on appelle f l'application qui, à tout $\vec{x}$ de E (puisque $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, $\vec{y} \in E'$, $\vec{z} \in E''$) fait correspondre $f(\vec{x}) = \vec{y} - \vec{z}$.

On montre :

1/ que f est linéaire, donc endomorphisme de E.

2/ que f est involutive

3/ que $f(\vec{y}) = \vec{y}$

4/ que $f(\vec{z}) = -\vec{z}$

5/ f ainsi définie est unique.

Démonstration

① * $f(\vec{x}+\vec{x}') = \underbrace{(\vec{y}+\vec{y}')}_{\in E'} - \underbrace{(\vec{z}+\vec{z}')}_{\in E''}$

$= (\vec{y}-\vec{z}) + (\vec{y}'-\vec{z}')$

$f(\vec{x}+\vec{x}') = f(\vec{x}) + f(\vec{x}')$

* $f(\lambda\vec{x}) = \lambda\vec{y} - \lambda\vec{z}$ $\quad \lambda\vec{y} \in E'$ et $\lambda\vec{z} \in E''$

$= \lambda(\vec{y}-\vec{z})$

$f(\lambda\vec{x}) = \lambda f(\vec{x})$

f est linéaire.

② $f \circ f = Id_E$?

oui si, $\forall \vec{x} \in E$, $(f\circ f)(\vec{x}) = \vec{x}$.

$f\circ f(\vec{x}) = f(\underbrace{\vec{y}}_{\in E'} - \underbrace{\vec{z}}_{\in E''}) = \vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$

f est involutive.

③ $f(\vec{y}) = \vec{y}$?

$\vec{y} = \vec{y} + \vec{0}$ $\qquad f(\vec{y}) = \vec{y} - \vec{0}$ $\qquad$ oui.

④ $f(\vec{z}) = -\vec{z}$?

$\vec{z} = \vec{0} + \vec{z}$ décomposition unique.

$f(\vec{z}) = \vec{0} - \vec{z} = -\vec{z}$ $\qquad$ oui.

⑤ f est unique.

Si $\exists f' \,/\, \vec{x} = \underbrace{\vec{y}}_{\in E'} + \underbrace{\vec{z}}_{\in E''}$ (unique)

$f'(\vec{x}) = \vec{y} - \vec{z}$
$= f(\vec{x})$

Diverses sortes d'automorphismes involutifs

1°/ $\dim E = 1 \longmapsto E$ = droite vectorielle.

* Id_E ($\dim E' = 1$; $\dim E'' = 0$)
* $-Id_E = h_{-1}$ ($\dim E' = 0$; $\dim E'' = 1$)

2°/ $\dim E = 2 \longmapsto E$ = plan vectoriel.

* Id_E
* toutes les symétries vectorielles par rapport à un $E' \subset E$, $\dim E' = 1$, et de direction $E'' \subset E$; $E = E' \oplus E''$.
* $-Id_E = h_{-1}$

3°/ $\dim E = 3$

* Id_E
* toutes les symétries vectorielles par rapport à $E' \subset E$, $\dim E' = 2$, et de direction $E'' \subset E$, $E = E' \oplus E''$, $\dim E'' = 1$
* toutes les symétries vectorielles par rapport à $E' \subset E$, $\dim E' = 1$, et de direction E'', $\dim E'' = 2$.
* $-Id_E = h_{-1}$

voir livre C10 p 130, 131 et 132.

24.10 5 Projections vectorielles p.

$\vec{y} = \frac{1}{2}(\vec{x} + s(\vec{x}))$

On convient de nommer $\vec{y}$, $p(\vec{x})$

$\vec{y} = p(\vec{x})$

$\vec{x} = \underbrace{p(\vec{x})}_{\in E'} + \underbrace{\vec{z}}_{\in E''}$

$s(\vec{x}) = p(\vec{x}) - \vec{z}$

p est appelée projection vectorielle de E, sur E' de direction E".

1°/ $p(\vec{x}) = \frac{1}{2}\left[Id_E(\vec{x}) + s(\vec{x})\right]$

$$p = \frac{1}{2}(Id_E + s)$$

2°/ p est linéaire (cf cours de seconde).

3°/

$p \circ p = \frac{1}{2}(Id_E + s) \circ \frac{1}{2}(Id + s)$

$= \frac{1}{4}\left[Id + s + s + \underbrace{s \circ s}_{Id}\right]$

$= \frac{1}{4}\left[2Id + 2s\right]$

$p \circ p = \frac{1}{2}(Id + s) = p$

$p \circ p = p$

4°/ $N_p = \{ \vec{x}, \vec{x} \in E \ / \ p(\vec{x}) = \vec{0} \}$

$\vec{x} = \underbrace{p(\vec{x})}_{\in E'} + \underbrace{\vec{z}}_{\in E''} \quad , \forall \vec{x} \in E$

Alors $\vec{x} = \vec{z}$ dès que $\vec{x} \in N_p$

$\vec{x} \in E'' \vdash \underline{N_p \subset E''}$

Si $\vec{x} \in E''$, $\vec{x} = \vec{0} + \vec{z} \vdash p(\vec{x}) = \vec{0}$

$\vec{x} \in N_p$

donc $\underline{E'' \subset N_p}$

Donc :

$N_p = E''$ $\quad$ $\mathcal{I}m\, p = E'$

25.10

5°/ Soit p, endomorphisme de E, tel que :

$p \circ p = p$

p est donc un projecteur de E

$\exists\ \mathcal{I}m p \quad ; \exists N_p$

* $\mathfrak{Im}\, p \cap N_p = \{\vec{0}\}$?

$\forall \vec{x} \in \mathfrak{Im}\, p \cap N_p$,

$\vec{x} \in \mathfrak{Im}\, p \longmapsto \exists\, \vec{x}\,' \in E \;/\; p(\vec{x}\,') = \vec{x}$ (1)

$\vec{x} \in N_p \longmapsto p(\vec{x}) = \vec{0}$

Or, $p \circ p = p$. Donc (1) : $p[p(\vec{x}\,')] = p[\vec{x}]$

$$(p \circ p)(\vec{x}\,') = p(\vec{x})$$
$$p(\vec{x}\,') = p(\vec{x})$$
$$p(\vec{x}\,') = \vec{0}$$
$$\vec{x} = \vec{0}$$

$\underline{\mathfrak{Im}\, p \cap N_p = \{\vec{0}\}}$

* Est-ce que $\forall \vec{x} \in E$, on peut écrire $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, $\vec{y} \in \mathfrak{Im}\, p$, $\vec{z} \in N_p$?

Si oui, $E = \mathfrak{Im}\, p + N_p$ et, comme l'intersection des deux sous-espaces est $\{\vec{0}\}$, on écrira pour finir $E = \mathfrak{Im}\, p \oplus N_p$ et on aura trouvé 2 sous-espaces supplémentaires :

$E' = \mathfrak{Im}\, p$; $E'' = N_p$ et $E = E' \oplus E''$

et p = projection de E sur E', suivant E''.

démonstration

$\vec{y} = p(\vec{x})$, puisque $\vec{y} \in \mathfrak{Im}\, p$

$\vec{z} = \vec{x} - p(\vec{x})$

Est-ce que $\vec{z} \in N_p$?

Oui, si et seulement si $p(\vec{z}) = \vec{0}$

$$p[z] = p[\vec{x} - p(\vec{x})]$$
$$= p(x) - p(\vec{x}) = \vec{0}$$

Tout projecteur p de E est une projection vectorielle sur $\mathrm{Im}\, p$ suivant la direction de N_p.

On dit aussi : de base $\mathrm{Im}\, p$ et de direction N_p.

6.11 6 -104

Barycentre

Espaces affines

E = espace affine

$\{A_1, A_2, \dots, A_i, \dots, A_n\}$ = ensemble de points de E

$\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n\}$ = ensemble de réels asso-ciés respectivement aux points A_i

$$f : E \longrightarrow \vec{E}$$

$$M \longmapsto f(M) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i}$$

$$M' \longmapsto f(M') = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{M'A_i}$$

$$f(M) - f(M') = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (\overrightarrow{MA_i} - \overrightarrow{M'A_i}) \qquad \forall i \in [1,n] \cap \mathbb{N}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MM'}$$

$$= \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right)}_{\alpha} \overrightarrow{MM'}$$

$$\boxed{f(M) = f(M') + \alpha \overrightarrow{MM'} \quad \text{et} \quad \alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i}$$

f = fonction vectorielle de Leibnitz.

On montre que f est bijective si et seulement si $\alpha \neq 0$

1°/ Si $\sum \alpha_i = \alpha = 0$

Alors $f(M) = f(M')$

* f n'est pas injective
* f est constante :

$\forall M \in E \,,\ f(\vec{M}) = \vec{u}$

2°/ Si $\sum \alpha_i = \alpha \neq 0$

Alors $M \neq M' \vdash \overrightarrow{MM'} \neq \vec{0}$

$\vdash \sum \alpha_i \overrightarrow{MM'} \neq \vec{0}$

et $f(M) \neq f(M')$

Donc f est injective

f est-elle surjective ?

$\forall \vec{u} \in \vec{E}$, existe-t-il $M \in E \ / \ f(M) = \vec{u}$?

Choisissons $M' = O$, point fixe de E

L'égalité générale ci-dessus devient :

$$f(M) = f(O) + \sum \alpha_i \overrightarrow{MO}$$

Si $\exists M \ / \ f(\vec{M}) = \vec{u}$, alors :

$$\underbrace{f\,\vec{u}}_{\text{donné}} = \underbrace{f(O)}_{\text{connu}} + \underbrace{\sum \alpha_i}_{\neq 0} \underbrace{\overrightarrow{MO}}_{\text{inconnu}}$$

$$\overrightarrow{MO} = \frac{\vec{u} - f(O)}{\sum \alpha_i}$$

$$\overrightarrow{OM} = \frac{f(O) - \vec{u}}{\sum \alpha_i} \vdash \exists !\, M$$

En refaisant le calcul avec un autre O' fixé, on trouverait un autre point unique M' tel que

$$\overrightarrow{O'M'} = \frac{f(O') - \vec{u}}{\sum \alpha_i}$$

On montre que $M' = M$

$\exists !\, M \in E \;/\; f(M) = \vec{u}$

f est donc bijective si et seulement si $\sum \alpha_i \neq 0$.

Barycentre

$\vec{u} = \vec{0}$ et $\sum \alpha_i \neq 0$, alors $\exists !\, M = G \in E \;/$
$f(G) = \vec{0}$

$\sum \alpha_i \neq 0$ et $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, \overrightarrow{GA_i} = \vec{0} \longmapsto$ G est le barycentre des $A_i\,(\alpha_i)$

Propriétés

1°/ $\forall M \in E, \; \sum \alpha_i \overrightarrow{MA_i} = \left(\sum \alpha_i\right) \overrightarrow{MG}$

En effet :

$f(M) = f(M') + \sum \alpha_i \overrightarrow{MM'}$

Dans le cas où $M' = G$, alors $f(M') = f(G) = \vec{0}$

$$\overrightarrow{MG} = \frac{\sum(\alpha_i \overrightarrow{MA_i})}{\sum \alpha_i}$$

ou : si $M = O$,

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\sum \alpha_i \overrightarrow{OA_i}}{\sum \alpha_i}$$

2°/ Coordonnées de G dans un repère cartésien donné $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ou $(O, \vec{i}, \vec{j})$, ou $(O, \vec{i})$.

$A_i \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix}$ $G \begin{pmatrix} x_G \\ y_G \\ z_G \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\sum \alpha_i \overrightarrow{OA_i}}{\sum \alpha_i}$$

$$x_G \vec{i} + y_G \vec{j} + z_G \vec{k} = \frac{1}{\sum \alpha_i} \cdot \sum \alpha_i (x_i \vec{i} + y_i \vec{j} + z_i \vec{k})$$

$$x_G = \frac{\sum \alpha_i x_i}{\sum \alpha_i}$$

$$y_G = \frac{\sum \alpha_i y_i}{\sum \alpha_i}$$

$$z_G = \frac{\sum \alpha_i z_i}{\sum \alpha_i}$$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\sum \alpha_i \overrightarrow{OA_i}}{\sum \alpha_i}$$

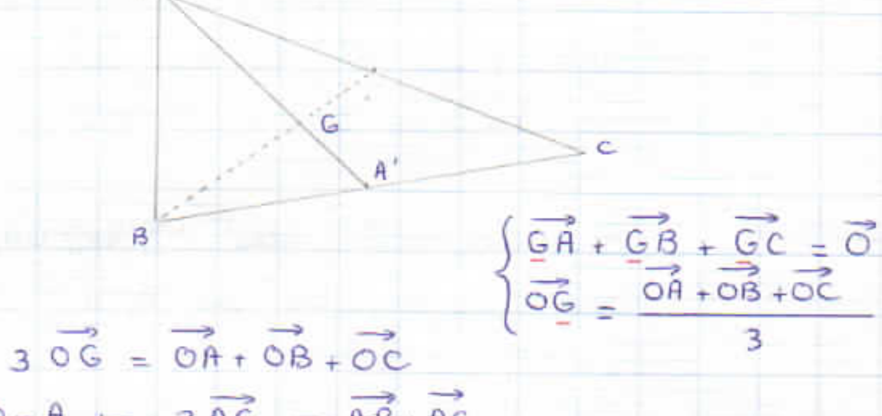
Dans le cas où tous les coefficients sont égaux (non nuls),
la relation :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\sum \alpha_i \overrightarrow{OA_i}}{\sum \alpha_i} \quad \text{devient :}$$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\alpha_i \sum \overrightarrow{OA_i}}{\alpha_i . n}$$

$$\boxed{\overrightarrow{OG} = \frac{\sum \overrightarrow{OA_i}}{n} \qquad \text{G : isobarycentre des } A_i}$$

exemple : $n = 3$, A, B et C non alignés.



$$\begin{cases} \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \\ \overrightarrow{OG} = \dfrac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3} \end{cases}$$

$$3\,\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

$$O = A \vdash \quad 3\,\overrightarrow{AG} = \underbrace{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}_{2\overrightarrow{AA'}}$$

G : isobarycentre de $\{A, B, C\}$ ou centre de gravité du triangle ABC.

exemple : $n = 2$

A ω B

G isobarycentre de A et B :

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{GA} = -\overrightarrow{GB}$$

$$G = \omega \text{ , milieu de } AB.$$

3% G indépendant de l'ordre dans lequel les A_i sont donnés.

4% $\lambda \neq 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$A_i(\alpha_i) \longmapsto G$ leur barycentre.

$A_i(\lambda\alpha_i) \longmapsto G' = G$

$\sum \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$, alors $\sum(\lambda\alpha_i)\overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$

Donc G, barycentre des $A_i(\alpha_i)$ est celui des $A_i(\lambda$

$G = G'$ ($\exists!\, G'$)

5% $1 < k < n$

$\{A_1, A_2, \dots, A_k, A_{k+1}, \dots, A_n\}$

On suppose que $\exists$ G barycentre des $A_i(\alpha_i)$ $\forall i \in [1,n]$

On choisit $\{A_1, A_2, \dots, A_k\}$ de façon que $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \neq 0$

Alors $\exists g$ barycentre des A_i, $\forall i \in [1, k] \cap \mathbb{N}$

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \overrightarrow{gA_i} = \vec{0} \qquad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$$

La 2e égalité, développée, donne :

$$\left(\alpha_1 \overrightarrow{GA_1} + \dots + \alpha_k \overrightarrow{GA_k}\right) + \alpha_{k+1} \overrightarrow{GA_{k+1}} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{GA_n} = \vec{0}$$

or $$\overrightarrow{Gg} = \frac{\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \overrightarrow{GA_i}}{\sum_{i=1}^{k} \alpha_i}$$

et $$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \cdot \overrightarrow{Gg}$$

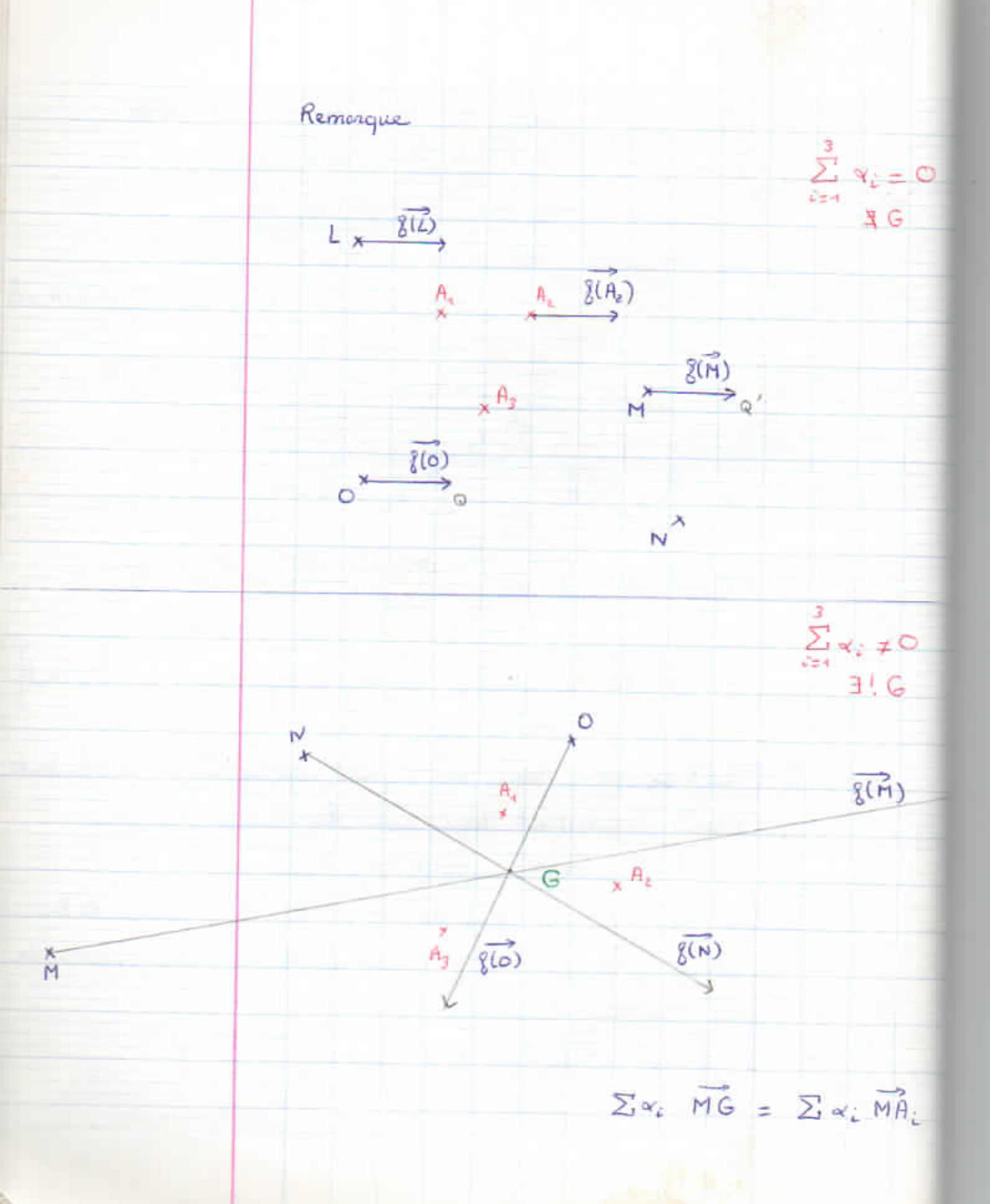
$$\sum \alpha_i \cdot \overrightarrow{Gg} + \alpha_{k+1} \overrightarrow{GA_{k+1}} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{GA_n} = \vec{0}$$

G : barycentre de $\left\{ g\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i\right) ; A_{k+1}(\alpha_{k+1}) ; \dots ; A_n(\alpha_n) \right\}$

Le barycentre total des n points munis des n coefficients donnés coïncident donc avec le barycentre des n - k + 1 points suivants :

Le barycentre partiel de k points A_i, munis de la somme $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i$, et des n - k points restants munis de leurs coefficients.

Remarque



$\sum \alpha_i \overrightarrow{MG} = \sum \alpha_i \overrightarrow{MA_i}$

(Es)paces affines : révision

Soit $\vec{E}$ un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

$\varphi : E \times E \longrightarrow \vec{E}$ $\quad M \in E$, M = points

$(M, M') \longmapsto \varphi(M, M') = \overrightarrow{MM'} = \vec{v} \in \vec{E}$

φ possède 2 propriétés :

1°/ $(A, B, C) \in E^3$

$\varphi(A, C) = \varphi(A, B) + \varphi(B, C)$

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

2°/ Soit $\exists O \in E$ fixé.

$\varphi(O, M) = \overrightarrow{OM}$

$\varphi_o(O, M)$

$\varphi_o : (O, M) \longmapsto \overrightarrow{OM}$ et φ_o bijective

Conséquences

1°/ $\varphi(A, B) = \vec{O} \longmapsto A = B$

2°/ $\varphi(A, B) = -\varphi(B, A)$

3°/ $\exists$ infinité O, O', O'' ...

* φ_o bijective, ainsi que $\varphi_{o'}$ ...

4°/ $(A, B) \mathcal{R} (C, D) \longmapsto \varphi(A, B) = \varphi(C, D)$

$\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence

5°/ $t_{\vec{u}} : E \longrightarrow E$

$$M \longmapsto M' = t_{\vec{u}}(M) \quad / \quad \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$$

6°/ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ permutation des moyens.

$\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{CA}$ " des extrêmes.

Sous - espaces affines

$E' \subset E$, espace affine.

Soit A fixé, $A \in E'$

Soit $\vec{E'} \subset \vec{E}$, $\vec{E'}$: sous - espace vectoriel de $\vec{E}$.

$E' = \{ M, M \in E \ / \ \overrightarrow{AM} \in \vec{E'} \}$

$\vec{E'} = \{ \vec{u}, \vec{u} \in \vec{E'} \ / \ \exists! M, M \in E' : \overrightarrow{AM} = \vec{u} \}$

On dit aussi que E' est une <u>variété affine</u> de E.

Ensemble des barycentres de 2 points donnés distincts, puis de 3 points donnés non alignés, puis de 4 points donnés non coplanaires.

Préliminaire

On appelle un <u>repère affine</u> un $(p+1)$-uplets de points $\in E_p$, p désignant la dimension de l'espace affine E_p auquel appartiennent les points étudiés.

Tout repère affine sera construit de façon que un des $(p+1)$ points jouant le rôle principal, alors les p

suivants donneront naissance à p vecteurs formant une base de l'espace vectoriel associé $\vec{E}_p$.

ex : $(\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2})$ = base de $\vec{E}_2$

$(A_0, \overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2})$ = repère cartésien de E_2

(A_0, A_1, A_2) = repère affine de E_2.

En général $(A_0, A_1, A_2, \dots, A_p)$ = repère affine de E_p si et seulement si $(A_0, \overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_p})$ = repère cartésien de E_p.

18.11

1e cas = 2 points A et B, $B \neq A$, sont donnés.

* $A(a)$, $B(b)$; $a + b \neq 0$

$\exists !$ G barycentre de $A(a)$ et $B(b)$

$$a\,\vec{GA} + b\,\vec{GB} = \vec{0}$$

$$a\,\vec{GA} + b(\vec{GA} + \vec{AB}) = \vec{0}$$

$$\vec{AG} = \frac{b\,\vec{AB}}{a+b} = \frac{b}{a+b}\,\vec{AB}$$

et $G \in (D)$, $D = (A, \vec{AB}) = (AB)$

Tous les G obtenus en faisant varier a et b, sous réserve que $a + b \neq 0$, appartiennent à la droite (AB)

Ens. des $G \subset (AB)$

* Inversement, est-ce que tout point $M \in (AB)$ peut être considéré comme un barycentre de A et B ? Oui

si et seulement si $\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2$ /

$$a\,\overrightarrow{MA} + b\,\overrightarrow{MB} = \vec{0}$$

$M \in (AB) \vdash \quad \overrightarrow{AM} = \lambda\,\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AM} = \lambda\,(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB})$

$\vec{0} = (1-\lambda)\,\overrightarrow{MA} + \lambda\,\overrightarrow{MB}$

$\underline{(1-\lambda)}\,\overrightarrow{MA} + \underline{\lambda}\,\overrightarrow{MB} = \vec{0}$

Or $(1-\lambda) + \lambda = 1 \neq 0$

Donc M est le barycentre de $A(1-\lambda)$ et $B(\lambda)$, la somme des coefficients étant 1

$(AB) \subset$ ensemble des G.

En résumé : | ensemble des G = (AB) |

<u>Remarque</u> : $1-\lambda$ et λ ne sont pas les seuls coefficients que l'on peut adjoindre à A et B ; mais ce sont 2 coefficients remarquables.

$\forall \alpha \in \mathbb{R}^*$, $\alpha(1-\lambda)$ et $\alpha\lambda$ sont des coefficients possibles pour le même M.

$$\left.\begin{array}{l} A(1-\lambda) \text{ et } B(\lambda) \\ A[\alpha(1-\lambda)] \text{ et } B[\alpha\lambda] \end{array}\right\} M = \text{barycentre.}$$

2ᵉ cas : A, B, C non alignés

* $A(\alpha)$; $B(\beta)$; $C(\gamma)$; $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$

$\exists ! G / \quad \alpha \vec{GA} + \beta \vec{GB} + \gamma \vec{GC} = \vec{0}$

$$\vec{AG} = \frac{\beta \vec{AB} + \gamma \vec{AC}}{\alpha + \beta + \gamma} = \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma} \vec{AB} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma} \vec{AC}$$

B

A

C $(\vec{AB}, \vec{AC})$ = base de l'espace vect. associé $\vec{P}$.

$(A, \vec{AB}, \vec{AC})$ = repère cartésien du plan affine (ABC)

$G \in (ABC) \vdash$ Ens. des G $\subset$ (ABC)

* Inversement, est-ce que, $\forall M \in$ plan (ABC),
M = barycentre de A, B, C munis de coefficients a, b, c ?

Donc, oui si et seulement si $\exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, $a+b+c \neq 0$,
$a \vec{MA} + b \vec{MB} + c \vec{MC} = \vec{0}$

or $M \in (ABC) \vdash \quad \vec{AM} = \lambda \vec{AB} + \mu \vec{AC} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$(1-\lambda-\mu) \vec{MA} + \lambda \vec{MB} + \mu \vec{MC} = \vec{0}$$

et $(1-\lambda-\mu) + \lambda + \mu = 1 \neq 0$

oui $\exists\ a = 1 - \lambda - \mu$

$\exists\ b = \lambda$

$\exists\ c = \mu$

Remarque

$\exists (a', b', c') = \alpha(a, b, c) \;, \alpha \neq 0.$

donc $(ABC) \subset$ Ens. des G

"L'ensemble des barycentres de 3 points non alignés est le plan affine déterminé par ces 3 points"

3° cas : A, B, C, D non coplanaires.

* $A(\alpha) ; B(\beta) ; C(\gamma) ; D(\delta) \; ; \quad \alpha+\beta+\gamma+\delta \neq 0$

$\exists ! \, G \, / \quad \alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} + \gamma \overrightarrow{GC} + \delta \overrightarrow{GD} = \vec{0}$

$$\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma+\delta} \overrightarrow{AB} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma+\delta} \overrightarrow{AC} + \frac{\delta}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}$$

$G \in$ à l'espace affine de dimension 3 ayant pour repère cartésien : $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$.

En effet, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont linéairement indépendants sinon A, B, C seraient alignés, et leur droite, avec D formeraient un plan (contradiction hypothèse).

$\exists$ plan(A,B,C)

Puis $D \notin (ABC) \longmapsto (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ linéairement indép. donc

Donc : Ens. des G $\subset$ esp. affine dim 3.

* Inversement, $\forall M \in$ espace affine dim 3 contenant A, B, C, D, M est-il barycentre de A, B, C, D ?

$\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AC} + \nu \overrightarrow{AD}$

(λ, μ, ν) = coordonnées de M dans le repère cartésien $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$

$$\underbrace{(1-\lambda-\mu-\nu)}_{a} \overrightarrow{MA} + \underbrace{\lambda}_{b} \overrightarrow{MB} + \underbrace{\mu}_{c} \overrightarrow{MC} + \underbrace{\nu}_{d} \overrightarrow{MD} = \vec{0}$$

$a + b + c + d = 1 \neq 0$

Donc : Esp. de dim 3 $\subset$ Ens. des G.

"L'ensemble des barycentres de 4 points A, B, C, D non coplanaires **est** l'espace affine de dimension 3 contenant les points A, B, C, D."

Z

Fonction scalaire de Leibnitz.

$$\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R} \quad ; \ E = \text{espace affine \underline{euclidien}}$$
$$M \longmapsto \varphi(M) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, MA_i^2$$

Rappel : $d(A,B) = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{\overrightarrow{AB}^2} = AB$

Ici $MA_i^2 = \overrightarrow{MA_i}^2$

$\varphi(M) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{MA_i}^2$

Dans le cas de 3 points A_i, soit A, B, C :

$\varphi(M) = \alpha \vec{MA}^2 + \beta \vec{MB}^2 + \gamma \vec{MC}^2$

$\varphi(M) = \alpha(\vec{MO}+\vec{OA})^2 + \beta(\vec{MO}+\vec{OB})^2 + \gamma(\vec{MO}+\vec{OC})^2$

$\varphi(M) = (\alpha+\beta+\gamma)\vec{MO}^2 + \varphi(O) + 2\vec{MO} \cdot \underbrace{(\alpha\vec{OA} + \beta\vec{OB} + \gamma\vec{OC})}_{\vec{f(O)}}$

1°/ Si $\alpha+\beta+\gamma = 0$

refaire la démonst. dans ce cas { Alors $\varphi(M) = \varphi(O) + 2\vec{MO} \cdot \vec{f(O)}$

* Si $\vec{f(O)} = \vec{f(A)} = \vec{f(B)} = \vec{f(C)} = \vec{0}$, alors φ est elle aussi une fonction constante.
* Si $\vec{f(O)} = \vec{f(A)} = \vec{f(B)} = \vec{f(C)} \neq \vec{0}$, alors φ n'est pas constante

2°/ Si $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$, $\exists !$ G barycentre de $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(\gamma)$

φ

$\varphi(M) = (\alpha+\beta+\gamma)\vec{MO}^2 + \varphi(O) + 2\vec{MO} \cdot \vec{f(O)}$

$O = G \vdash \varphi(M) = (\alpha+\beta+\gamma)\vec{MG}^2 + \varphi(G) + \vec{0}$

car $\vec{f(G)} = \vec{0}$

$$\boxed{\varphi(M) = \varphi(G) + (\alpha+\beta+\gamma)\vec{MG}^2}$$

$\varphi(G) = \alpha\vec{GA}^2 + \beta\vec{GB}^2 + \gamma\vec{GC}^2$

La formule encadrée présente non seulement l'intérêt que $\varphi(G)$ ~~est~~ y est aisément calculable, mais encore que la lettre M y figure une fois et une seule dans l'expression de $\varphi(M)$

$$\boxed{\begin{array}{l}\varphi(M) = \alpha \overrightarrow{MA}^2 + \beta \overrightarrow{MB}^2 + \gamma \overrightarrow{MC}^2 \\ \varphi(M) = \varphi(G) + (\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}^2\end{array}}$$

φ = fonction scalaire de Leibnitz

Conséquences : Ensemble des points M tels que $\varphi(M) = k$, $k \in \mathbb{R}$

Supposons qu'on se donne un réel k. On veut réaliser $\varphi(M) = k$. Est-ce possible ?

$$\varphi(M) = k \longmapsto \begin{cases} \alpha+\beta+\gamma = 0 \text{ et } \varphi(O) + 2\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{g(O)} = k \\ \text{ou} \\ \alpha+\beta+\gamma \neq 0 \text{ et } \varphi(G) + (\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}^2 = k \end{cases}$$

21.11 1°/ Si $\alpha + \beta + \gamma = 0$

Le ~~pro~~ problème à résoudre est :

$\exists M \in E \;/\; \varphi(O) + 2\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{g(O)} = k$

(O fixé)

$2\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{g(O)} = k - \varphi(O)$

$\varphi(O) = \alpha\overrightarrow{OA}^2 + \beta\overrightarrow{OB}^2 + \gamma\overrightarrow{OC}^2$ connu.

* $\overrightarrow{g(O)}$ est un vecteur constant (voir $\alpha+\beta+\gamma=0$ et la fonction vectorielle de Leibnitz), il se peut que $\overrightarrow{g(O)} = \vec{O}$

Alors

$$2\,\overrightarrow{MO}\cdot\underbrace{\overrightarrow{g(O)}}_{\vec{O}} = k - \varphi(O)$$

Si k, donné, vérifie $k = \varphi(O)$, alors $\forall M \in E$, $\overrightarrow{MO}\cdot\vec{O} = 0$

Si $k \neq \varphi(O)$, $\nexists M$ et Ensemble des $M = \emptyset$

* Si $\overrightarrow{g(O)} = \vec{m}$ constant $\neq \vec{O}$

Alors $\quad \overrightarrow{MO}\cdot\vec{m} = \dfrac{k-\varphi(O)}{2}$

$$\overrightarrow{OM}\cdot\vec{m} = \frac{\varphi(O)-k}{2}$$

$\exists!\, A_0 \in E \ / \ \overrightarrow{OA_0} = \vec{m}$

$$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OA_0} = \frac{\varphi(O)-k}{2}$$

pratiquement (on peut alors envisager le cas où $A_0 = O$ et on retombe au cas précédent)

O $\quad \vec{m} \quad A_0 \quad M_0$

Cherchons, s'ils existent, des M_o appartenant à la droite (OA_o). Si oui :

$$\vec{OM_o} = \lambda \vec{OA_o}$$

Alors $\vec{OM_o} \cdot \vec{OA_o} = \lambda \vec{OA_o}^2$

Si on donne $\vec{OA_o} = \alpha \vec{i}$, alors $\vec{OA_o}^2 = \alpha^2 \vec{i}^2$ $(\alpha \neq 0$ car $\vec{m} \neq 0)$

et si $\|\vec{i}\| = 1$, alors $OA_o^2 = \alpha^2$

De sorte que $\vec{OM_o} \cdot \vec{OA_o} = \lambda \alpha^2$

On doit avoir $\lambda \alpha^2 = \frac{1}{2}(\varphi(0) - k)$ d'où λ.

$\exists! \lambda \,/\, \vec{OM_o} = \lambda \vec{OA_o}$

$\exists! M_o \,/\, \vec{OM_o} \cdot \vec{OA_o} = \frac{1}{2}(\varphi(0) - k)$

Si $M \neq M_o \mapsto \vec{M_oM} \neq \vec{0}$, on doit avoir :

$$\vec{OM} \cdot \vec{OA_o} = \frac{1}{2}(\varphi(0) - k)$$

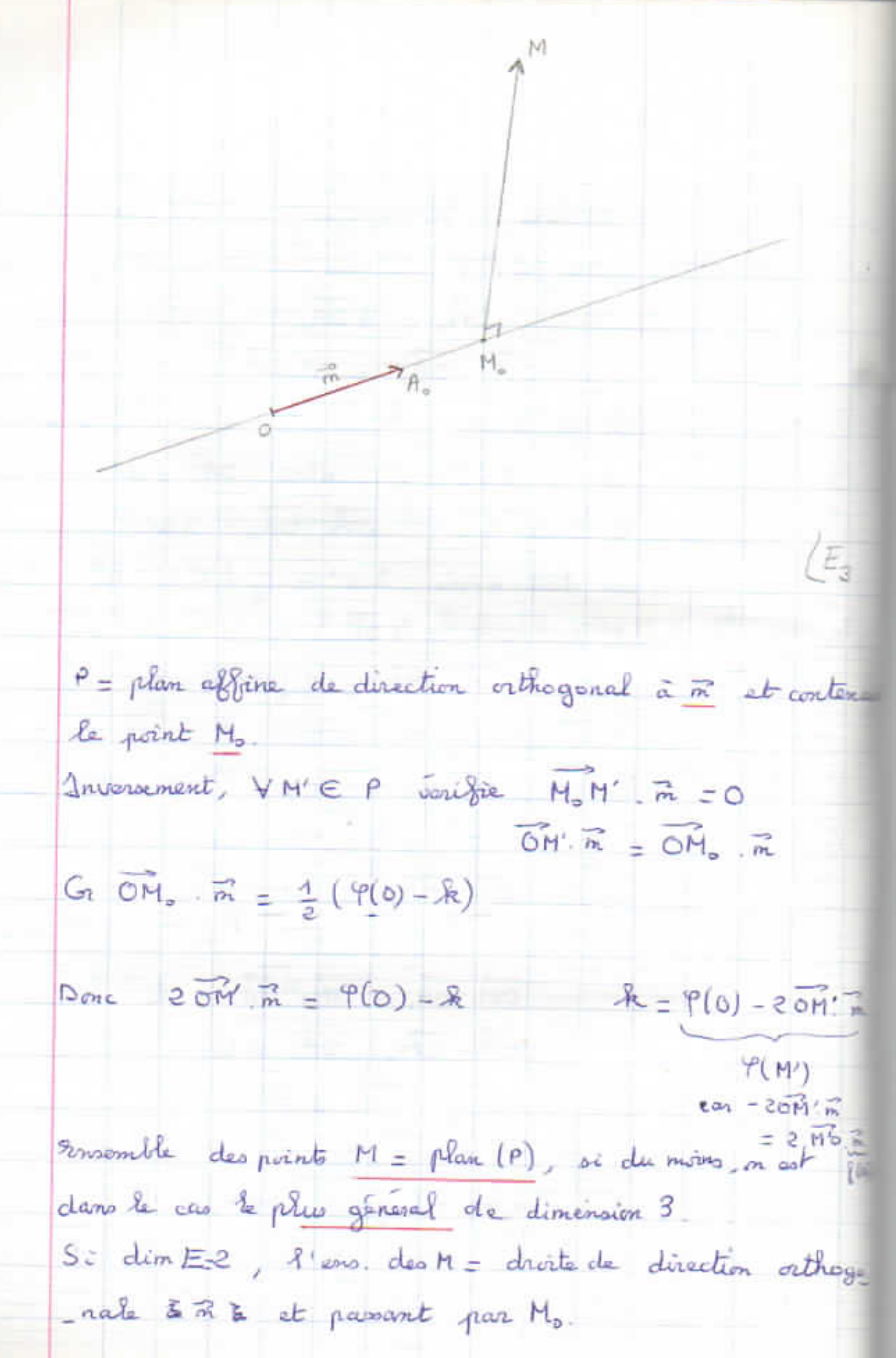
d'où $\vec{OM} \cdot \vec{OA_o} = \vec{OM_o} \cdot \vec{OA_o}$

$$\vec{OM} \cdot \vec{OA_o} - \vec{OM_o} \cdot \vec{OA_o} = 0$$

$$(\vec{OM} - \vec{OM_o}) \cdot \vec{OA_o} = 0$$

$$\underbrace{\vec{M_oM}}_{\neq \vec{0}} \cdot \underbrace{\vec{OA_o}}_{\vec{m} \neq \vec{0}} = 0$$

Donc $\vec{M_oM}$ orthogonal à $\vec{OA_o}$



P = plan affine de direction orthogonal à $\vec{m}$ et contenant le point M_0.

Inversement, $\forall M' \in P$ vérifie $\overrightarrow{M_0M'} \cdot \vec{m} = 0$

$$\overrightarrow{OM'} \cdot \vec{m} = \overrightarrow{OM_0} \cdot \vec{m}$$

Or $\overrightarrow{OM_0} \cdot \vec{m} = \frac{1}{2}(\varphi(0) - k)$

Donc $2\overrightarrow{OM'} \cdot \vec{m} = \varphi(0) - k$ $\qquad k = \underbrace{\varphi(0) - 2\overrightarrow{OM'} \cdot \vec{m}}_{\varphi(M')}$

car $-2\overrightarrow{OM'} \cdot \vec{m} = 2\,\overrightarrow{M'O} \cdot \vec{m}$

Ensemble des points M = plan (P), si du moins, on est dans le cas le plus général de dimension 3.

Si dim E=2, l'ens. des M = droite de direction orthogonale à $\vec{m}$ et passant par M_0.

2/ Si $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$, $\exists ! G \;/\; \overrightarrow{f(G)} = \vec{0}$

$\varphi(M) = \varphi(G) + (\alpha + \beta + \gamma) MG^2$

$\varphi(M) = k \mapsto \varphi(G) + (\alpha + \beta + \gamma) MG^2 = k$

$\varphi(G) = \alpha \overrightarrow{GA}^2 + \beta \overrightarrow{GB}^2 + \gamma \overrightarrow{GC}^2$

$$MG^2 = \frac{k - \varphi(G)}{\alpha + \beta + \gamma}$$

Si $\dfrac{k - \varphi(G)}{\sum \alpha} > 0$, alors l'ensemble des M est :

* si $\dim E = 1$, $\{M_1, M_2\}$ tels que $GM_1 = GM_2 = \sqrt{\dfrac{k - \varphi(G)}{\sum \alpha}}$
* si $\dim E = 2$, cercle de rayon $\sqrt{\ldots}$
* si $\dim E = 3$, sphère $(G, \sqrt{\ldots})$

Si $\dfrac{k - \varphi(G)}{\sum \alpha} = 0$, alors $\exists ! M = G$

Si $\dfrac{k - \varphi(G)}{\sum \alpha} < 0$, alors $\nexists M$

29.11 7

Applications affines

Définition

$f : E \longrightarrow E$ E = espace affine

$M \longmapsto f(M) = M'$

$N \longmapsto f(N) = N'$

f est dite affine si et seulement si $\exists\, \varphi$, linéaire, de $\vec{E}$ vers $\vec{E}$ (espace vectoriel associé à E) telle que $\varphi(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{f(M)f(N)}$, $\forall (M,N) \in E^2$

Remarque : φ est unique

Si $\exists\, \psi$, 2ᵉ endomorphisme de $\vec{E}$, défini pareillement

$$\begin{cases} \varphi(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{M'N'} & \text{avec } M' = f(M) \text{ et } N' = f(N) \\ \psi(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{M'N'} \end{cases}$$

Alors $\forall \vec{u} \in \vec{E}$, on va montrer que $\varphi(\vec{u}) = \psi(\vec{u})$

En effet : $\forall \vec{u} \in \vec{E}$, et M donné, $M \in E$;

$\exists!\, N \,/\, \overrightarrow{MN} = \vec{u}$; alors $\varphi(\vec{u}) = \varphi(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{M'N'}$

$\psi(\vec{u}) = \psi(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{M'N'}$

Donc $\psi = \varphi$

L'endomorphisme φ associé à f est unique.

...nts équipollents :

f affine de E dans E

$A' = f(A)$; $B' = f(B)$

$C' = f(C)$; $D' = f(D)$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \longmapsto \varphi(\overrightarrow{AB}) = \varphi(\overrightarrow{CD})$

$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{C'D'}$

$\overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{C'D'}$ sont donc des vecteurs égaux.

(A', B') et (C', D') sont des bipoints équipollents.

(A, B) et (C, D) équipollents $\longmapsto$ (A', B') et (C', D') équipollents

...sition de 2 applications affines

$f : E \longrightarrow E$

$M \longmapsto f(M) = M'$

$g : E \longrightarrow E$

$M' \longmapsto g(M') = M''$

$g \circ f \quad E \longrightarrow E$

$M \longmapsto (g \circ f)(M) = M''$

f affine [et] g affine

$\exists ! \varphi$ endomorphisme de $\vec{E}$ / $\forall (M,N) \in E^2$, $\varphi(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{M'N'}$

$\exists ! \psi$ endomorphisme de $\vec{E}$ / $\forall (M',N') \in E^2$, $\psi(\overrightarrow{M'N'}) = \overrightarrow{M''N''}$

Donc : $\psi[\varphi(\overrightarrow{MN})] = \overrightarrow{M''N''}$

$\underbrace{(\psi \circ \varphi)}_{\text{linéaire}}(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{M''N''}$

1°) Il existe $(\psi \circ \varphi)$ endomorphisme de $\vec{E}$ associé à $g \circ f$ puisque $g \circ f(M) = M''$

$g \circ f(N) = N''$

2°) $g \circ f$ est associé à $\psi \circ \varphi$

Détermination d'une application affine.

Supposons qu'on donne $A' = f(A)$; A et A' connus

Supposons, de plus, que φ linéaire de $\vec{E}$ dans $\vec{E}$ soit donnée.

f est une application de E dans E

$\forall M \in E$, soit $M' = f(M)$

Si $\varphi(\overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{A'M'}$, cela est suffisant pour que

(donné) (donné)

f soit affine.

En effet, on va montrer que $\forall (M,N) \in E^2$, $N' = f(N)$,
$\varphi(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{M'N'}$

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM}$

$\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{A'N'} - \overrightarrow{A'M'}$

Alors $\varphi(\overrightarrow{MN}) = \underbrace{\underbrace{\varphi(\overrightarrow{AN})}_{\overrightarrow{A'N'}} - \underbrace{\varphi(\overrightarrow{AM})}_{\overrightarrow{A'M'}}}_{\overrightarrow{M'N'}}$ (φ linéaire)

$$\varphi(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{M'N'}$$

Cas particulier : si $M = A$, alors $M' = A'$ et $\varphi(\overrightarrow{AA}) = \overrightarrow{A'A'}$
, $\varphi(\vec{0}) = \vec{0}$ (compatible avec la linéarité de φ)

5.12

Retour sur la composée $g \circ f$ de 2 applications affines

* Si f et g sont bijectives, ce sont des transformations affines, et $g \circ f$ est aussi une transformation affine.

Remarque :

$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

car $(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ \underbrace{f \circ f^{-1}}_{Id_E} \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = Id_E$

$(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = Id_E$

$*\ h : \quad \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{L}(\vec{E}) \qquad (\mathcal{L}(\vec{E}), +, \circ) =$ anneau

$f \longmapsto \varphi = h(f)$

$f' \longmapsto \varphi' = h(f')$

$f' \circ f \longmapsto \varphi' \circ \varphi = h(f' \circ f) = h(f') \circ h(f)$

$$h(f' \circ f) = h(f') \circ h(f)$$

h est un homomorphisme.

Si les f considérées sont bijectives, alors $\mathcal{A}$ se change en $\mathcal{B}$, le groupe affine.

Les φ associées sont, elles aussi bijectives (voir $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = Id_E$; $\varphi \circ \varphi^{-1} = \varphi^{-1} \circ \varphi = Id_{\vec{E}}$)

Alors $\mathcal{L}(\vec{E})$ se change en $GL(\vec{E})$

$$h : \overset{GA(E)}{\widetilde{\mathcal{B}}} \longmapsto GL(\vec{E})$$

h est un homomorphisme de groupes

Conservation du barycentre

G barycentre des $A_i(\alpha_i) \longmapsto \sum_i \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$ (1)

$A'_i = f(A_i)$, f affine de E vers E.

$\cdot\ G' = f(G)$.

$\varphi(\overrightarrow{GA_i}) = \overrightarrow{G'A'_i}$

(1) ⟼ $\varphi\left(\sum \alpha_i \overrightarrow{GA_i}\right) = \varphi(\vec{0}) = \vec{0}$

$\sum \alpha_i \overrightarrow{G'A'_i} = \vec{0}$ ⟼ G′ barycentre des $A'_i(\alpha_i)$

Remarques.

* Si $A_i \neq A_j$ ⟼ $A'_i = A'_j$, alors f non injective.

$\alpha_1 \overrightarrow{G'A'_1} + \dots + \alpha_i \overrightarrow{G'A'_i} + \dots + \alpha_j \overrightarrow{G'A'_j} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{G'A'_n} = \vec{0}$

$(\alpha_i + \alpha_j)\, \overrightarrow{G'A'_i}$

Tout se passe comme si A'_i était affecté de $\alpha_i + \alpha_j$.

* Milieu de (A, B) = barycentre de $A(1)$ et $B(1)$

$f(A) = A'$ $\quad f(B) = B'$

$\exists!$ barycentre de $A'(1)$ et $B'(1)$ = milieu du couple (A', B')

Si f non injective, B' peut être confondu avec A' et alors le milieu de (A', A') est A'.

∴ L'image du milieu de (A, B) est le milieu de (A', B').

* M décrit $[A, B]$ ⟼ $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB}$ $\quad (A \neq B)$

A M B

et donc $0 \leq \lambda \leq 1$

$\overrightarrow{AM} = \lambda(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB})$

$(1-\lambda)\,\overrightarrow{AM} = \lambda\,\overrightarrow{MB}$

$(1-\lambda)\,\overrightarrow{MA} + \lambda\,\overrightarrow{MB} = \vec{O}$

M = barycentre de $\begin{cases} A\,(1-\lambda) \\ B\,(\lambda) \end{cases}$ $\{A(1-\lambda)\,;\ B(\lambda)\} = f$

Soient : $M' = g(M)$ $A' = g(A)$ $B' = g(B)$

M' = barycentre de la partie $\{A'(1-\lambda)\,;\ B'(\lambda)\}$

car $\overrightarrow{OM'} = (1-\lambda)\overrightarrow{OA'} + \lambda\overrightarrow{OB'}$

Dom A' $\overrightarrow{A'M'} = \lambda\,\overrightarrow{A'B'}$

et $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$

A' [M'] B'

et M' décrit $[A', B']$ (voir contradiction avec le choix de λ et la place de M' en dehors du segment).

* Alignement et ordre de (A, C, B).

A C B

A' C' B'

$A' = g(A)$

$B' = g(B)$

$C' = g(C)$

* Ensemble des M = droite (AB).

$\forall M \in (AB)$, M = barycentre de $A(\alpha)$ et $B(\beta)$

et $\alpha + \beta \neq 0$

$M' = f(M)$ est alors :

1°/ Si $A' \neq B'$, M' est aligné avec A' et B'.

2°/ Si $A' = B'$, alors $M' = A' = B'$ et la droite affine (AB) a pour image $\{A'\}$

* Ensemble des M = plan (ABC)

M = barycentre de $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(\gamma)$; $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$

$M' = f(M) \in f(\text{plan}(ABC))$

1°/ il se peut que $M' \in$ plan $(A'B'C')$

2°/ il se peut que $M' \in$ droite $(A'B'C')$ alignés

3°/ " " $M' = A' = B' = C'$

$f(\text{plan}(ABC)) = \{A'\}$

Image d'un sous-espace affine par une application affine

$\forall M \in \mathcal{V}(A, \vec{E}')$; $\vec{E}'$ sous-espace vectoriel de $\vec{E}$, $\vec{E}$ associé à E.

$\mathcal{V}(A, \vec{E}')$ = variété affine passant par A et de direction $\vec{E}'$ = sous-espace affine de E.

Préliminaire

$\varphi : \vec{E} \longrightarrow \vec{E}$ $\quad \vec{E}' \subset \vec{E}$

$\hat{\varphi} : \vec{E}' \longrightarrow \underbrace{\hat{\varphi}(\vec{E}')}$

sous-espace vectoriel ?

a) $\hat{\varphi}(\vec{E}') \neq \emptyset$ car $\exists \vec{0} \in \vec{E}'$

b) Stabilité de $\vec{\varphi}(\vec{E}')$ pour l'addition.

$\forall \varphi(\vec{u})$ et $\varphi(\vec{v}) \in \hat{\varphi}(\vec{E}')$

$\varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v}) = \varphi(\underbrace{\vec{u}+\vec{v}}_{\in \vec{E}'})$ car $(\vec{u},\vec{v}) \in \vec{E}'^2$

$\exists (\vec{u}+\vec{v}) \in \vec{E}' \,/\, \vec{u}+\vec{v}$ antécédent de $\varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v})$

c) Stabilité pour .

$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \ \forall \varphi(\vec{u}) \in \hat{\varphi}(\vec{E}')$

$\lambda \varphi(\vec{u}) = \varphi(\underbrace{\lambda \vec{u}}_{\in \vec{E}'})$ dès que $\vec{u} \in \vec{E}'$

$\exists (\lambda \vec{u}) \in \vec{E}' \,/\, \lambda \vec{u}$ antécédent de $\lambda \varphi(\vec{u})$

$\varphi(\vec{E}')$ = sous-espace vectoriel

Problème

Revenons à $\mathcal{V}(A, \vec{E}') = \mathcal{V}$

$M' = f(M)$ donc $M' \in f[\mathcal{V}(A, \vec{E}')]$

alors :

* $\forall M \in \mathcal{V}(A, \vec{E}') \mapsto \vec{AM} \in \vec{E}' \vdash \varphi(\vec{AM}) \in \varphi(\vec{E}')$

$\vdash \vec{A'M'} \in \varphi(\vec{E}')$

ce qui équivaut à $M' \in \mathcal{V}(A', \varphi(\vec{E}')) = \mathcal{V}'$

* Inversement :

$\forall M'' \in \mathcal{V}(A', \varphi(\vec{E}')) \mapsto \underbrace{\overrightarrow{A'M''}}_{\vec{u}'} \in \varphi(\vec{E}')$

$\vec{u}' \in \varphi(\vec{E}')$

$\exists \vec{u} \in \vec{E}' \ / \ \varphi(\vec{u}) = \vec{u}' = \overrightarrow{A'M''}$

Or, $A' = f(A)$

$\vec{u} = \overrightarrow{AM} \ ; \ \exists!\, M \in \mathcal{V}(A, \vec{E}')$

$\overrightarrow{A'M''} = \varphi(\overrightarrow{AM})$

donc $M'' = f(M)$ donc $M'' \in f[\mathcal{V}(A, \vec{E}')]$

Résumé

$f(\mathcal{V}(A, E')) \subset \mathcal{V}'(A', \varphi(\vec{E}'))$

$\mathcal{V}'(A', \varphi(\vec{E}')) \subset f(\mathcal{V}(A, E'))$

Donc $f(\mathcal{V}(A, \vec{E}')) = \mathcal{V}'(A', \varphi(\vec{E}'))$

dim $f(E')$?

Posons : $E' = \mathcal{V}(A, \vec{E}')$ et $\dim E' = p$

$\dim f(E')$?

$\dim f(E') = \dim \varphi(\vec{E}')$

Or, $\forall \vec{u} \in \vec{E}'$, $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + \ldots + m\vec{\omega}$

$$\varphi(\vec{u}) = x\,\varphi(\vec{i}) + y\,\varphi(\vec{j}) + \ldots + m\,\varphi(\vec{\omega})$$

$P = \{\varphi(\vec{i}), \varphi(\vec{j}), \ldots, \varphi(\vec{\omega})\}$ = partie de p éléments

= génératrice de $\varphi(\vec{E}')$

Cardinal $P \geqslant$ Cardinale d'une base de $\varphi(\vec{E}')$

(base = partie génératrice minimale)

$\dim \varphi(\vec{E}') \leqslant p$

Il en est de même pour $\dim f(E')$: $\dim \varphi(\vec{E}') \leqslant \dim \vec{E}$

- Pour que la dimension soit encore p, il serait suffisant que f, donc φ, soit injective". En effet :

$\{\varphi(\vec{i}), \varphi(\vec{j}), \ldots, \varphi(\vec{\omega})\}$ libre si et seulement si

$x\,\varphi(\vec{i}) + \ldots + m\,\varphi(\vec{\omega}) = \vec{0} \vdash x = m = \ldots = 0$

Or ce sont les coordonnées de $\vec{0}$ dans $\vec{E}'$

Donc $N\varphi = \{\vec{0}\}$

$N\varphi = \{\vec{0}\} \dashv \varphi$ injective ?

$\varphi(\vec{u}) = \varphi(\vec{v}) \vdash \varphi(\underbrace{\vec{u} - \vec{v}}_{\in N\varphi}) = \vec{0} \vdash \vec{u} - \vec{v} = \vec{0} \vdash \vec{u} = \vec{v}$

Donc φ injective. Voir exercice pour :

φ injective $\vdash f$ injective.

Points invariants

M invariant par f ⟵ $f(M) = M' = M$
A " " ⟵ $f(A) = A' = A$

Alors : $\varphi(\overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{A'M'} = \overrightarrow{AM}$
$\varphi(\overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{AM}$
et $\overrightarrow{AM}$ invariant par φ

$\overrightarrow{AM} = \vec{u}$ $\varphi(\vec{u}) = \vec{u}$

Les $\vec{u}$, invariants par φ forment-ils un sous-espace vectoriel de $\vec{E}$?

$\varphi(\vec{u} + \vec{v}) = \varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v})$
$= \vec{u} + \vec{v}$, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ invariants.
$(\vec{u} + \vec{v})$ est aussi invariant

$\varphi(\lambda \vec{u}) = \lambda \varphi(\vec{u})$
$= \lambda \vec{u}$
$(\lambda \vec{u})$ est aussi invariant

Remarque

Ce sous-espace n'est jamais vide ($\exists \vec{0}$ / $\varphi(\vec{0}) = \vec{0}$)
L'~~ensemble des points~~ "

L'ensemble des points invariants par f, s'il n'est pas vide, est $\mathcal{V}(A, \vec{E}')$, avec $A = A'$ et $\vec{E}' =$ ens. des vecteurs invariants.

Il se peut que $\nexists M \;/\; f(M) = M$. Dans ce cas, l'ensemble vide $\emptyset$ est l'ensemble des points invariants ; il n'a pas de direction $\vec{E}'$.

Il se peut que $\exists! M / f(M) = M$

ex : $\exists!\, A \;/\; f(A) = A$ ens. inv $= \{A\}$, de direction $\{\vec{O}\}$

Application affine de E_3 possédant au moins 4 points invariants non coplanaires.

$A \overset{f}{\longmapsto} A' = f(A) = A$

$B \longmapsto B' = B$

$C \longmapsto C' = C$

$D \longmapsto D' = D$

$f : \left((A, A') \,;\, \varphi \right)$

$$\varphi : \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$

$\varphi = Id_{\vec{E}_3}$

$\overrightarrow{OM'} = \varphi(\overrightarrow{OM}) + \overrightarrow{OO'}$

$\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OO'}$

$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{OO'}$

Donc f est une translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$.

Or $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$

Donc $f = Id_{E_3}$

8.1 8 Homothéties – Translations

Translations

① $t_{\vec{u}} : E \longrightarrow E$

($\vec{u}$ donné) $M \longmapsto M' = t_{\vec{u}}(M) \;/\; \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$

② $t_{\vec{u}}$ = bijection affine de E sur E

* affine :

$\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{M'M} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NN'}$

$= -\vec{u} + \overrightarrow{MN} + \vec{u}$

$\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN} = Id_{\vec{E}_3}(\overrightarrow{MN})$

$\exists\, \varphi = Id_{\vec{E}_3}$, endomorphisme associé à $t_{\vec{u}}$

Si $\vec{u} = \vec{0}$, alors $t_{\vec{u}} = Id_{E_3}$

* bijection :

$\overrightarrow{MM'} = \vec{u} \iff \overrightarrow{M'M} = -\vec{u}$

$t_{-\vec{u}} : M' \longmapsto M \;/\; \overrightarrow{M'M} = -\vec{u}$

$\exists\, t_{\vec{u}}^{-1} = t_{-\vec{u}}$

En effet $t_{-\vec{u}} \circ t_{\vec{u}}(M) = t_{-\vec{u}}[M_1]$ avec $\overrightarrow{MM_1} = \vec{u}$

$= M'$ avec $\overrightarrow{M_1M'} = -\vec{u}$

donc $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M'} = \vec{0}$

et $t_{-\vec{u}} \circ t_{\vec{u}} = Id_{E_3} = t_{\vec{0}}$

③ Points invariants :

$\overrightarrow{MM} = \vec{u} \longmapsto \vec{u} = \vec{0}$

Si $\vec{u}$ donné $\neq \vec{0}$, $\nexists$ points invariants.

Si $\vec{u} = \vec{0}$, $t_{\vec{u}} = Id_{E_3}$

④ Image d'un sous-espace de E = un sous-espace affine de même dimension.

⑤ Toute application affine de E dans E associée à $Id_{\vec{E}}$ est une translation de E

$\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN} \longmapsto \overrightarrow{NN'} = \overrightarrow{MM'}$ (échange des extrêmes)

$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'} = \overrightarrow{PP'} = \ldots$

$\forall M$, $M' = f(M)$, $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$ fixe, donc $f = t_{\vec{u}}$

Pratiquement, pour montrer qu'une f de E dans E est une translation, on peut se servir : a) de la définition b) de la propriété caractéristique n° 5.

⑥ Soit $\mathcal{T}$ = ensemble des translations de E.

$(\mathcal{T}, \circ)$ = groupe commutatif isomorphe à $(\vec{E}_3, +)$.

A) * $\circ$ interne

$t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}} \in \mathcal{T}$?

$\forall M \in E, \quad t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}}(M) = t_{\vec{v}}(M_1) \;/\; \overrightarrow{MM_1} = \vec{u}$

$= M' \;/\; \overrightarrow{M_1 M'} = \vec{v}$

et $\overrightarrow{MM'} = \vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$

$\exists\, t_{\vec{u}+\vec{v}} : M' = t_{\vec{u}+\vec{v}}(M)$

donc $\quad t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}+\vec{v}}$

* $\circ$ associative

* $\exists\, t_{\vec{0}} = Id_E \;/\; \forall t_{\vec{u}} \in \mathcal{T}$,

$t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{0}} = t_{\vec{0}} \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}}$

* $\forall t_{\vec{u}} \in \mathcal{T}, \exists\, t_{-\vec{u}} \in \mathcal{T} \;/\; t_{\vec{u}} \circ t_{-\vec{u}} = t_{-\vec{u}} \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{0}}$

* $\circ$ est commutative dans $\mathcal{T}$

$t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{u}+\vec{v}}$

B) $\varphi : (\mathcal{T}, \circ) \longrightarrow (\vec{E}, +)$ $\qquad$ φ bijective

$t_{\vec{u}} \longmapsto \varphi(t_{\vec{u}}) = \vec{u}$

$t_{\vec{v}} \longmapsto \varphi(t_{\vec{v}}) = \vec{v}$

$t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}} \longmapsto \varphi(t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}}) = \vec{u} + \vec{v}$

$$\varphi(t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}}) = \varphi(t_{\vec{v}}) + \varphi(t_{\vec{u}})$$

⑦ $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ repère cartésien de E_3

$M\ (x, y, z)$

$M'\ (x', y', z')$

$\vec{u}\ (a, b, c)$ dans la base $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de $\vec{E}_3$

$$\overrightarrow{MM'} = \vec{u} \mapsto \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \\ z' = z + c \end{cases}$$

Homothéties

cherche ω car.
trouver que $\overrightarrow{\omega M} \neq \alpha\, \overrightarrow{\omega M}$

① $h_{(\omega, \alpha)} : E \longrightarrow E$

$\alpha \in \mathbb{R}^*$ $\qquad M \longmapsto M' / \ \overrightarrow{\omega M'} = \alpha\, \overrightarrow{\omega M}$

ex : $\alpha = 1$, $\overrightarrow{\omega M'} = \overrightarrow{\omega M} \mapsto M' = M \quad \forall M \in E$

$h_{(\omega, 1)} = Id_E$, $\forall \omega \in E$



② $h_{(\omega,\alpha)}$ = bijection affine de E sur E.

* affine :

$$\begin{cases} \overrightarrow{\omega M'} = \alpha \overrightarrow{\omega M} \\ \overrightarrow{\omega N'} = \alpha \overrightarrow{\omega N} \end{cases}$$

$$\overrightarrow{\omega N'} - \overrightarrow{\omega M'} = \alpha \overrightarrow{MN}$$

$$\overrightarrow{M'N'} = \alpha \overrightarrow{MN}$$

$\exists \varphi = h_\alpha$ endomorphisme associée de $\vec{E}$

* bijection :

$$h_{(\omega,\frac{1}{\alpha})} : \quad M' \longmapsto M$$

$$/ \ \overrightarrow{\omega M} = \frac{1}{\alpha} \overrightarrow{\omega M'}$$

$$\exists \ h^{-1}_{(\omega,\frac{1}{\alpha})} = h_{(\omega,\frac{1}{\alpha})}$$

③ Points invariants.

$$\overrightarrow{\omega M} = \alpha \overrightarrow{\omega M} \quad \longmapsto \quad (1-\alpha)\overrightarrow{\omega M} = \vec{O}$$

Si $\alpha \neq 1$, $\exists!\ \omega$ invariant

④ Image d'un sous-espace de E = un sous-espace affine de même dimension.

⑤ Toute application affine de E dans E associée à une homothétie vectorielle h_α $(\alpha \neq 0)$ est une
$\alpha \neq 1$

homothétie.

Oui, si et seulement si on en détermine le centre

Par exemple : f définie par $\left((A, A'), h_\alpha\right)$.

Existe-t-il au moins 1 point invariant. Si oui, soit ω, alors

$$h_\alpha(\overrightarrow{A\omega}) = \overrightarrow{A'\omega}$$

$$\alpha \overrightarrow{A\omega} = \overrightarrow{A'\omega}$$

$$\overrightarrow{\omega A'} = \alpha \overrightarrow{\omega A} \quad , \omega ?$$

$$\alpha \overrightarrow{\omega A} - \overrightarrow{\omega A'} = \vec{0}$$

ω = barycentre de $\{A(\alpha), A'(-1)\}$ si et seulement si $\alpha \neq 1$.

$\exists! \, \omega$

ou encore : $\alpha \overrightarrow{\omega A} = \overrightarrow{\omega A} + \overrightarrow{AA'}$

$$(\alpha - 1)\overrightarrow{\omega A} = \overrightarrow{AA'}$$

si $\alpha \neq 1$ alors $-\overrightarrow{\omega A} = \dfrac{\overrightarrow{AA'}}{1-\alpha}$

$\dfrac{1}{1-\alpha}$ = abscisse de ω dans $(A, \overrightarrow{AA'})$.

3.1 $\exists! \, \omega$

Si $\alpha = 1$, $(\alpha - 1)\overrightarrow{\omega A} = \overrightarrow{AA'}$

$$0 . \overrightarrow{\omega A} = \overrightarrow{AA'}$$

(A, A' donnés)

* si $A' \neq A$, $\nexists \, \omega$ translation

* Si $A' = A$, f définie par $((A, A)\ Id_{\vec{E}})$

$0 . \overrightarrow{\omega A} = \vec{0}$, oui $\forall \omega \in E$

$f = Id_E$

Dans la pratique, <u>savoir</u> que f affine associée à h_α, $\alpha \neq 1$ est une homothétie.

⑥ $(\mathcal{H}_\omega, \circ)$ = groupe commutatif isomorphe à $(\mathbb{R}^*, \times)$

A) * $\circ$ interne

$h_{(\omega,\beta)} \circ h_{(\omega,\alpha)} =$

$M \overset{h_{(\omega,\alpha)}}{\longmapsto} M_1 \overset{h_{(\omega,\beta)}}{\longmapsto} M'$

$\overrightarrow{\omega M_1} = \alpha \overrightarrow{\omega M}$

$\overrightarrow{\omega M'} = \beta \overrightarrow{\omega M_1}$

$\overrightarrow{\omega M'} = (\alpha\beta) \overrightarrow{\omega M}$

$\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$ car $h_{(\omega,\alpha)}$ est une homothétie (idem β)

Donc $\alpha\beta \neq 0$ ⊢ M' image de M par $h_{(\omega, \alpha\beta)}$

ex : $h_{(\omega,-2)} \circ h_{(\omega,\frac{1}{2})} = h_{(\omega,-1)}$

M

M_1

ω

M'

* $\exists\ h_{(\omega,1)} = Id_E$
* $\forall\ h_{(\omega,\alpha)} \in \mathcal{H}_\omega$, $\exists \left(h_{(\omega,\alpha)}\right)^{-1}$

$$h_{(\omega,\alpha)} \circ \underbrace{h_{(\omega,\frac{1}{\alpha})}}_{h^{-1}_{(\omega,\alpha)}} = h_{(\omega,1)} = Id_E$$

* $h_{(\omega,\beta)} \underset{\uparrow}{\circ} h_{(\omega,\alpha)} = h_{(\omega,\alpha)} \underset{\uparrow}{\circ} h_{(\omega,\beta)} = h_{(\omega,\alpha\beta)}$

B) $\varphi : (\mathcal{H}_\omega, \circ) \longrightarrow (\mathbb{R}^*, \times)$

$h_\alpha \longmapsto \varphi(h_\alpha) = \alpha$

$$\boxed{\varphi(h_\beta \underset{\uparrow}{\circ} h_\alpha) = \varphi(h_\alpha) \underset{\uparrow}{\times} \varphi(h_\beta)}$$

De plus, φ est bijective.

φ = isomorphisme de groupes

⑦ Expression analytique

$\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ repère cartésien de E_3

$h_{(\omega,\alpha)}$ $\quad \omega(x_0, y_0, z_0)$

$\alpha \in \mathbb{R}^*$

$M' = h_{(\omega,\alpha)}(M) \mapsto \overrightarrow{\omega M'} = \alpha \overrightarrow{\omega M}$

$$\begin{cases} x' = x_0 + \alpha(x - x_0) \\ y' = y_0 + \alpha(y - y_0) \\ z' = z_0 + \alpha(z - z_0) \end{cases}$$

$x' = x_0 +$
$y' = y_0 +$
$z' = z_0 +$

↓

$$\begin{cases} x' = \alpha x + a \\ y' = \alpha y + b \\ z' = \alpha z + c \end{cases}$$

↑

Homothéties - translations

* $\forall f \in \mathcal{H} \cup \mathcal{T} \mapsto \varphi$ associé est une homothétie vect.

Ceci a été démontré (4 démonstrations).

* $(\mathcal{H} \cup \mathcal{T}, \circ)$ = groupe non commutatif

$\forall (f, g) \in (\mathcal{H} \cup \mathcal{T})^2$,

$\exists! \varphi$ associé à f et φ = homothétie vectorielle

$\exists! \varphi'$ " à g et φ' = hom. vect.

$\varphi' \circ \varphi$ = endomorphisme associé à $g \circ f$

$\varphi' \circ \varphi$ = composée de 2 hom. vect. = hom. vect.

Donc $g \circ f \in \mathcal{H} \cup \mathcal{T}$

De plus $Id \in \mathcal{H} \cup \mathcal{T}$

$Id_E \in \mathcal{H} \cap \mathcal{T}$ $\quad\quad \mathcal{H} \cap \mathcal{T} = \{ Id_E \}$

$\forall h \in \mathcal{H}$, h bijective

$\forall t \in \mathcal{T}$, t bijective.

Sur les 4 exemples qui suivent, on vérifiera la non commutativité.

Exemples

① $\underbrace{h_{(\omega_2, \alpha_2)}}_{h_2} \circ \underbrace{h_{(\omega_1, \alpha_1)}}_{h_1} \in \mathcal{H} \cup \mathcal{T}$

* Supposons $\alpha_1 \alpha_2 \neq 1$. On est sûr alors (voir endomorphismes) que le "produit" est une homothétie de rapport $\alpha_1 \alpha_2$ mais de centre inconnu ; or ce centre est l'unique point invariant de $h_2 \circ h_1$

$$\omega \xmapsto{h_1} \omega' \xmapsto{h_2} \omega$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{\omega_1 \omega'} = \alpha_1 . \overrightarrow{\omega_1 \omega} \\ \overrightarrow{\omega_2 \omega} = \alpha_2 \overrightarrow{\omega_2 \omega'} \end{cases} \quad \vdash \quad \overrightarrow{\omega_2 \omega} = \alpha_2 \left(\overrightarrow{\omega_2 \omega_1} + \overrightarrow{\omega_1 \omega'} \right)$$

$$\overrightarrow{\omega_2 \omega} = \alpha_2 \overrightarrow{\omega_2 \omega_1} + \alpha_2 \alpha_1 \overrightarrow{\omega_1 \omega}$$

$$\overrightarrow{\omega_2 \omega_1} + \overrightarrow{\omega_1 \omega} = \alpha_2 \overrightarrow{\omega_2 \omega_1} + \alpha_2 \alpha_1 \overrightarrow{\omega_1 \omega}$$

$$(1 - \alpha_1 \alpha_2) \overrightarrow{\omega_1 \omega} = (\alpha_2 - 1) \overrightarrow{\omega_2 \omega_1}$$

$$(1 - \alpha_1 \alpha_2) \overrightarrow{\omega_1 \omega} = (1 - \alpha_2) \overrightarrow{\omega_1 \omega_2}$$

d'où : $$\boxed{\overrightarrow{\omega_1 \omega} = \frac{1 - \alpha_2}{1 - \alpha_1 \alpha_2} . \overrightarrow{\omega_1 \omega_2}}$$

ω, ω_1 et ω_2 sont donc alignés.

$$h_{(\omega_2, \alpha_2)} \circ h_{(\omega_1, \alpha_1)} = h_{(\omega, \alpha_1 \alpha_2)}$$

cas où $\alpha_2 = -2$

$\alpha_1 = \frac{1}{2}$

* Si $\alpha_1 \alpha_2 = 1$ (ex : $\alpha_1 = \frac{1}{2}$ et $\alpha_2 = 2$)

$h_2 \circ h_1 = t_{\vec{u}}$, $\vec{u}$?

$\vec{u} = \overrightarrow{MM'}$, $\forall M \in E$, $M' = (h_2 \circ h_1)(M)$

$\vec{u} = \overrightarrow{\omega_1 \omega_1'}$ / $\omega_1' = h_2(\omega_1)$ car $h_1(\omega_1) = \omega_1$

nous avons :

$$\overrightarrow{\omega_2 \omega_1'} = \alpha_2 \overrightarrow{\omega_2 \omega_1}$$

$$\overrightarrow{\omega_2 \omega_1} + \overrightarrow{\omega_1 \omega_1'} = \alpha_2 \overrightarrow{\omega_2 \omega_1}$$

$$\vec{u} = (\alpha_2 - 1) \overrightarrow{\omega_2 \omega_1}$$

$$\boxed{\vec{u} = (1 - \alpha_2) \overrightarrow{\omega_1 \omega_2}}$$

$h_2 \circ h_1 = t_{\vec{u}}$, si $\alpha_1 \alpha_2 = 1$

② $h_{(\omega_2, \alpha_2)} \circ t_{\vec{u}} = ?$

$\alpha_2 \neq 1$

Il s'agira ici, voir endomorphisme d'une

homothétie de centre inconnu et de rapport α_2.

$\omega \xmapsto{t_{\vec{u}}} \omega' \xmapsto{h_2} \omega$

$$\begin{cases} \overrightarrow{\omega\omega'} = \vec{u} \\ \overrightarrow{\omega_2\omega} = \alpha_2 \overrightarrow{\omega_2\omega'} \end{cases}$$

$\overrightarrow{\omega_2\omega} = \alpha_2 \overrightarrow{\omega_2\omega} + \alpha_2 \vec{u}$

$(1-\alpha_2)\overrightarrow{\omega_2\omega} = \alpha_2 \vec{u}$

$$\boxed{\overrightarrow{\omega_2\omega} = \frac{\alpha_2}{1-\alpha_2}\vec{u}}$$

$\overrightarrow{\omega_2\omega}$ colinéaire à $\vec{u}$

③ Nous conseillons au lecteur de faire seul la composition $t_{\vec{u}} \circ h_{(\omega_1,\alpha_1)}$.

Remarque - f d'endomorphisme associé $p / p \circ p = p$ n'est une projection que s'il existe au moins 1 pt invariant -

6.1 9

Projections sur D (ou P), parallèlement à D' (ou P')

* dans E_2 : sur D, parallèlement à D'
* dans E_3 : sur D, " à P'
* dans E_3 : sur P, " à P'

① Définition

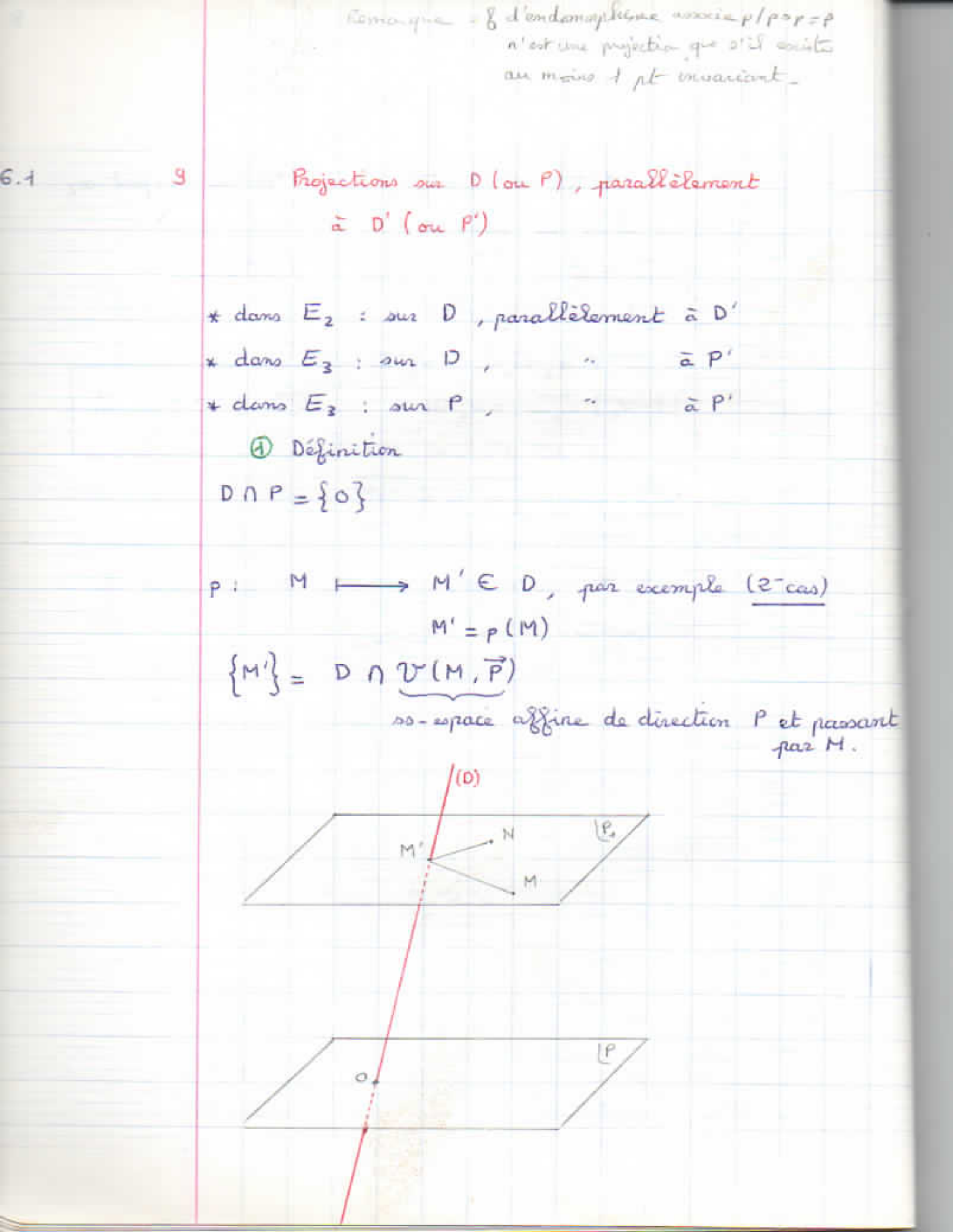
$D \cap P = \{O\}$

$p : \quad M \longmapsto M' \in D$, par exemple <u>(2e cas)</u>

$$M' = p(M)$$

$\{M'\} = D \cap \underbrace{\mathcal{V}(M, \vec{P})}$

ss-espace affine de direction P et passant par M.



p n'est ni surjective (voir ∃ l'ensemble des images) ni injective (voir M et N $\in P_1$)

② p est affine.

$p(O) = O$

$\underbrace{\overrightarrow{OM}} = \underbrace{\overrightarrow{OM'}} + \underbrace{\overrightarrow{M'M}}$

$\vec{u} = \underbrace{\vec{u}'}_{\in \vec{D}} + \underbrace{\vec{u}''}_{\in \vec{P}}$

$\vec{D}$ et $\vec{P}$ supplémentaires dans $\vec{E}_3$

$\vec{u}' = \pi(\vec{u})$, π = projection vectorielle sur $\vec{D}$ de direction $\vec{P}$ ($\vec{P} = N_\pi$)

$\exists \pi$ endomorphisme de $\vec{E}_3$ associé à p

p ((O,O), π) est affine.

③ Image d'une droite.

* ~~Dans~~ Soit un point , soit la droite (D) suivant que $\Delta \subset P_1$, par exemple ($P_1 // P$) ou que $\Delta \cap P_1 = \{\omega\}$

④

Si l'on choisit le repère $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ avec $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ = base de $\vec{P}$ et $\{\vec{w}\}$ = base de $\vec{D}$

alors

$$M_{(\pi,\vec{u},\vec{v},\vec{w})} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Soit le repère $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$

$M(x, y, z) \qquad M'(x', y', z')$

$\overrightarrow{OM}' = \pi(\overrightarrow{OM})$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = M_\pi \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x' = 0 \\ y' = 0 \\ z' = z \end{cases}$$

Nous conseillons au lecteur de faire les deux autres cas.

17.1 10 Involutions affines

①

$f : E \longrightarrow E \quad (E_2 \text{ ou } E_3)$

$f \circ f = Id_E$

$f[f(M)] = M$

$f \circ f(M) = M, \quad \forall M \in E$

② $\exists!\ \varphi$ endomorphisme associé ; φ est-il involutif ?

oui si : $\varphi \circ \varphi = Id_{\vec{E}}$

Soit $f(M) = M'$

$f(N) = N'$

$\varphi(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{M'N'}$

$\varphi(\overrightarrow{M'N'}) = \overrightarrow{M''N''} = \overrightarrow{f(M')f(N')} = \overrightarrow{f^2(M)\ f^2(N)}$

$= \overrightarrow{MN}$

$\varphi(\overrightarrow{M'N'}) = \overrightarrow{MN}$

$\varphi \circ \varphi(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{MN}$

$\varphi \circ \varphi(\vec{u}) = \vec{u}, \quad \forall \vec{u} \in \vec{E} \quad (\forall \vec{u}, \exists (M,N) \in E^2)$

et φ involutif (on connait toutes les sortes de φ inv de $\vec{E}_2$ ou $\vec{E}_3$)

③ φ involutive ⊢ φ bijective ⊢ f bijective

④ Milieu de (M, M') = barycentre de $\{M(1)\ ;\ M'(1)\}$

$1.\overrightarrow{\omega M} + 1.\overrightarrow{\omega M'} = \vec{0}$

$\overrightarrow{\omega M'} = -\overrightarrow{\omega M}$

$f(\omega) = \omega'$ = barycentre de $\{f(M)(1)\ ;\ f(M')(1)\}$

de $\{M'(1)\ ;\ M(1)\}$

Il s'agit du même ensemble de points (pas le même couple), donc du même milieu.

$\omega' = \omega$ et ω est invariant par f involutive.

Une f affine involutive possède donc toujours au moins un point invariant

⑤ On vient de voir que : $\begin{cases} f \text{ affine invol.} \vdash \varphi \text{ involutive} \\ f \text{ affine invol.} \vdash \exists \omega \text{ invariant} \end{cases}$

Inversement, $f(A, A', \varphi$ involutif$)$ est-elle involutive ?

En général non, car f ne possède peut-être pas de points invariants.

Mais $f((\omega, \omega), \varphi$ involutif$)$ est-elle involutive ?

$M' = f(M)$, $\forall M \in E$

$\varphi(\overrightarrow{\omega M}) = \overrightarrow{\omega M'}$

or $\varphi \circ \varphi = Id_{\vec{E}}$

$$\varphi \circ \varphi (\overrightarrow{\omega M}) = \overrightarrow{\omega M}$$

$$\varphi (\overrightarrow{\omega M'}) = \overrightarrow{\omega M} \qquad f(M') = M''$$

$$\overrightarrow{\omega M''} = \overrightarrow{\omega M}$$

$$M'' = M$$

$$f \circ f (M) = M \quad , \forall M \in E$$

$$f \circ f = Id_E$$

$f \left[(\omega, \omega) , \varphi \text{ involutif} \right] \vdash f = \text{involution affine}$

⑥ Nature des involutions affines de E_2 et E_3

ⓐ Rappel.

Matrices possibles des automorphismes involutifs de $\vec{E_2}$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ matrice de $Id_{\vec{E_2}}$ dans $(\vec{i}, \vec{j})$ quelconque

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ $f(\vec{u}) = \vec{u}$, $f(\vec{v}) = -\vec{v}$, $\vec{u} \in \vec{E'}$, $\vec{v} \in \vec{E''}$

$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ $-Id_{\vec{E_2}} = h_{-1}$ base quelconque

$\vec{E'} \oplus \vec{E''} = \vec{E_2}$, symétrie vectorielle par rapport à $\vec{E'}$ de direction $\vec{E''}$

La base $(\vec{u}, \vec{v})$ qui a permis d'écrire la matrice remarquable $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ a été construite avec $\vec{u} \in \vec{E}'$ et $\vec{v} \in \vec{E}''$

Choisissons maintenant, dans E_2, un repère $\mathcal{R} = (\omega, \vec{u}, \vec{v})$; $f(\omega) = \omega$.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\vec{\omega\omega}}$$

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$$

Il s'agit d'une symétrie par rapport à une droite parallèlement à une droite.

La 3e matrice $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ associée au couple (ω, ω) donne $h_{(\omega, -1)}$

$M \longmapsto M' = h_{(\omega,-1)}(M) \not= M \quad / \quad \overrightarrow{\omega M'} = -\overrightarrow{\omega M}$

Dans $(\omega, \vec{u}, \vec{v})$ $\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$ $\exists ! \, \omega$ invariant.

⑧ Involution affines de E_3 :

4 types, suivant la matrice.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

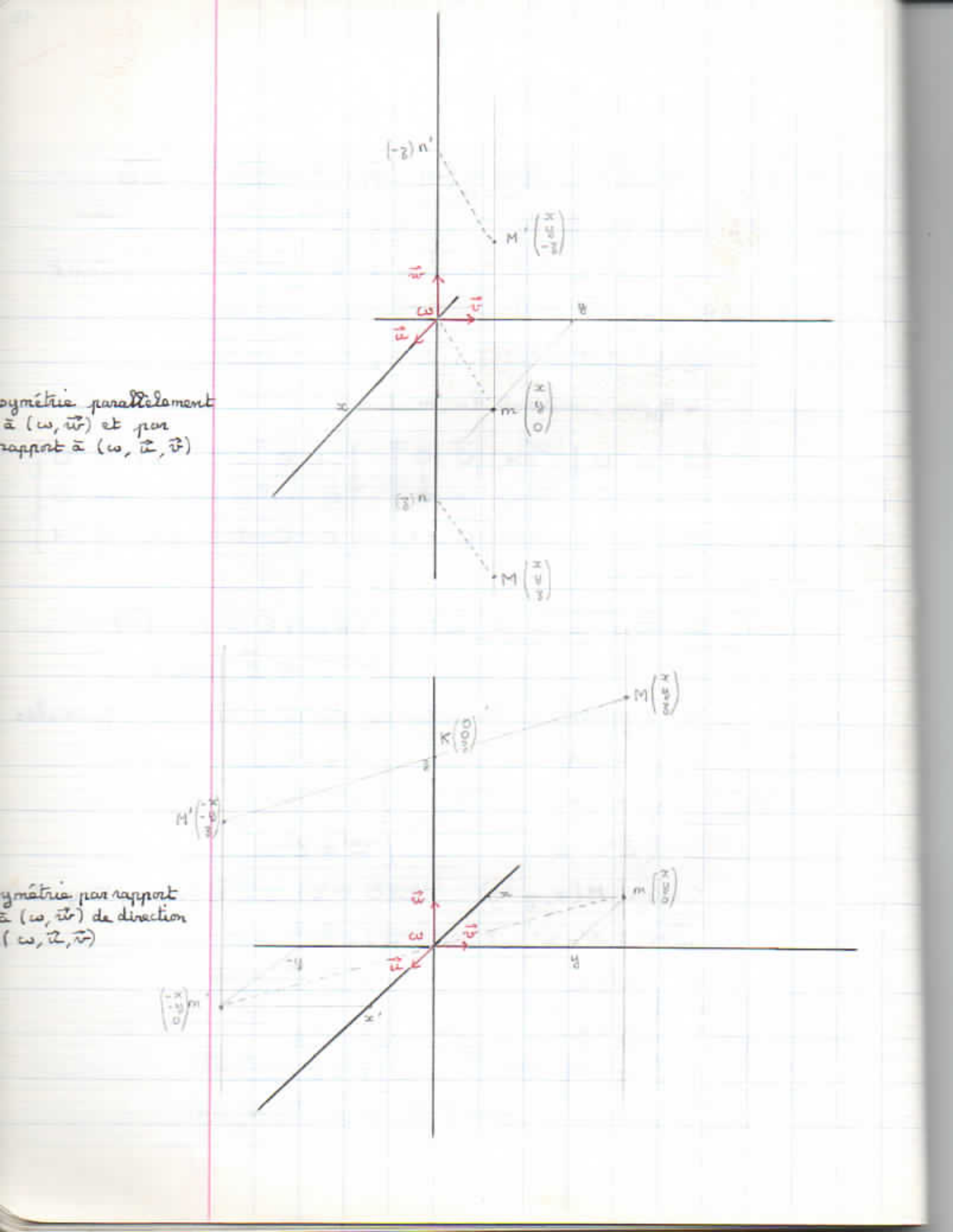
Si $\mathcal{R} = (\omega, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, $(\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{E}'$ (ou $\vec{E}''$)
$\vec{w} \in \vec{E}''$ (ou $\vec{E}'$)

Les 2 matrices intermédiaires donnent lieu aux formules

$$\begin{cases} X' = X \\ Y' = Y \\ Z' = -Z \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} X' = -X \\ Y' = -Y \\ Z' = Z \end{cases}$$

Comme $M(x, y, z)$, $\omega(0,0,0)$, $\overrightarrow{\omega M}(X = x, Y = y, Z = z)$
$\overrightarrow{\omega M'}(X' = x', Y' = y', Z' = z')$

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \\ z' = -z \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \\ z' = z \end{cases}$$



symétrie parallèlement
à (ω, $\vec{w}$) et par
rapport à (ω, $\vec{u}$, $\vec{v}$)
M'
M
m
n
n'
x
y
ω
$\vec{u}$
$\vec{v}$
$\vec{w}$
symétrie par rapport
à (ω, $\vec{w}$) de direction
(ω, $\vec{u}$, $\vec{v}$)
K
x'
-y

12.2 11 Transformations orthogonales

Définition - Propriétés - Groupe orthogonal

voir livre (C10 175)

Transformation orthogonale involutive de $\vec{E}$ ($\dim \vec{E} = 1, 2$ ou 3)

* On connait toutes les transformations involutives de $\vec{E}$.

(dimension 1 : il y en a 2

" 2 : il y en a de 3 sortes

" 3 : il y en a de 4 sortes)

* Orthogonales : que peut-on dire des sous-espaces vectoriels supplémentaires $\vec{E}'$ et $\vec{E}''$ dont on connait l'existence et la propriété :

$\forall \vec{w} \in \vec{E}, \ \vec{w} = \vec{u} + \vec{v}, \ \vec{u} \in \vec{E}', \ \vec{v} \in \vec{E}''$

$\varphi(\vec{w}) = \vec{u} - \vec{v}$

φ orthogonale $\mapsto \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u} - \vec{v}\|^2$

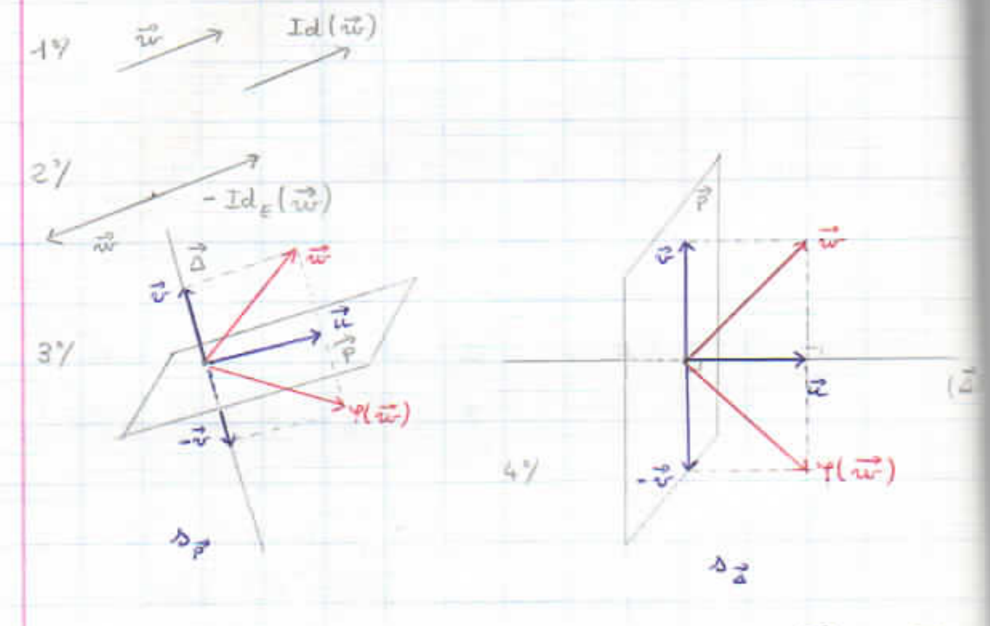
$(\vec{u} + \vec{v})^2 = (\vec{u} - \vec{v})^2$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

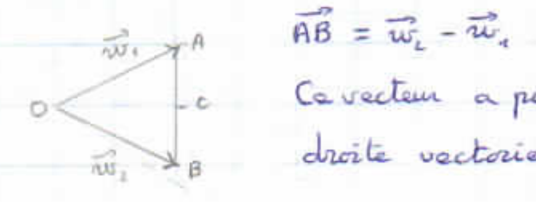
Si aucun des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ n'est nul (c'est le cas lorsque $\vec{E}'$ et $\vec{E}''$ sont de dimension 1 ou 2 dans des

espaces de dimension 2 ou 3) alors $\vec{u} \perp \vec{v}$ et ceci
$\forall \vec{u} \in \vec{E}'$, $\forall \vec{v} \in \vec{E}''$

$\vec{E}'$ orthogonal à $\vec{E}'$ (rappel : $\vec{E}' \oplus \vec{E}'' = \vec{E}$)



Inversement, si l'on se donne deux vecteurs $\vec{w}_1$ et $\vec{w}_2$ de même norme, et non colinéaires ; existe-t-il au moins une symétrie vectorielle orthogonale distincte de $Id_{\vec{E}}$ et de $-Id_{\vec{E}}$ telle que $\vec{w}_2 = s(\vec{w}_1)$
(d'ailleurs, alors on aurait $\vec{w}_1 = s(\vec{w}_2)$)



$\vec{AB} = \vec{w}_2 - \vec{w}_1$

Ce vecteur a pour support une droite vectorielle qui est

(ou qui est incluse dans) le sous-espace vectoriel des vecteurs transformés en leur opposé par s éventuelle.
Dans un espace de dimension 3, il existe $s_{\vec{P}}$ orthogonale, $\vec{P}$ étant orthogonal à $\vec{AB} = \vec{w}_2 - \vec{w}_1$ ..
Si on désire une $s_{\vec{\Delta}}$, c'est la droite affine $\vec{OC}$ qui fournit la direction de $\vec{\Delta}$ de vecteur directeur $\frac{1}{2}(\vec{w}_1 + \vec{w}_2)$.

Orientation du plan vectoriel euclidien (révision 1°)

Rotations vectorielles de l'espace E_3

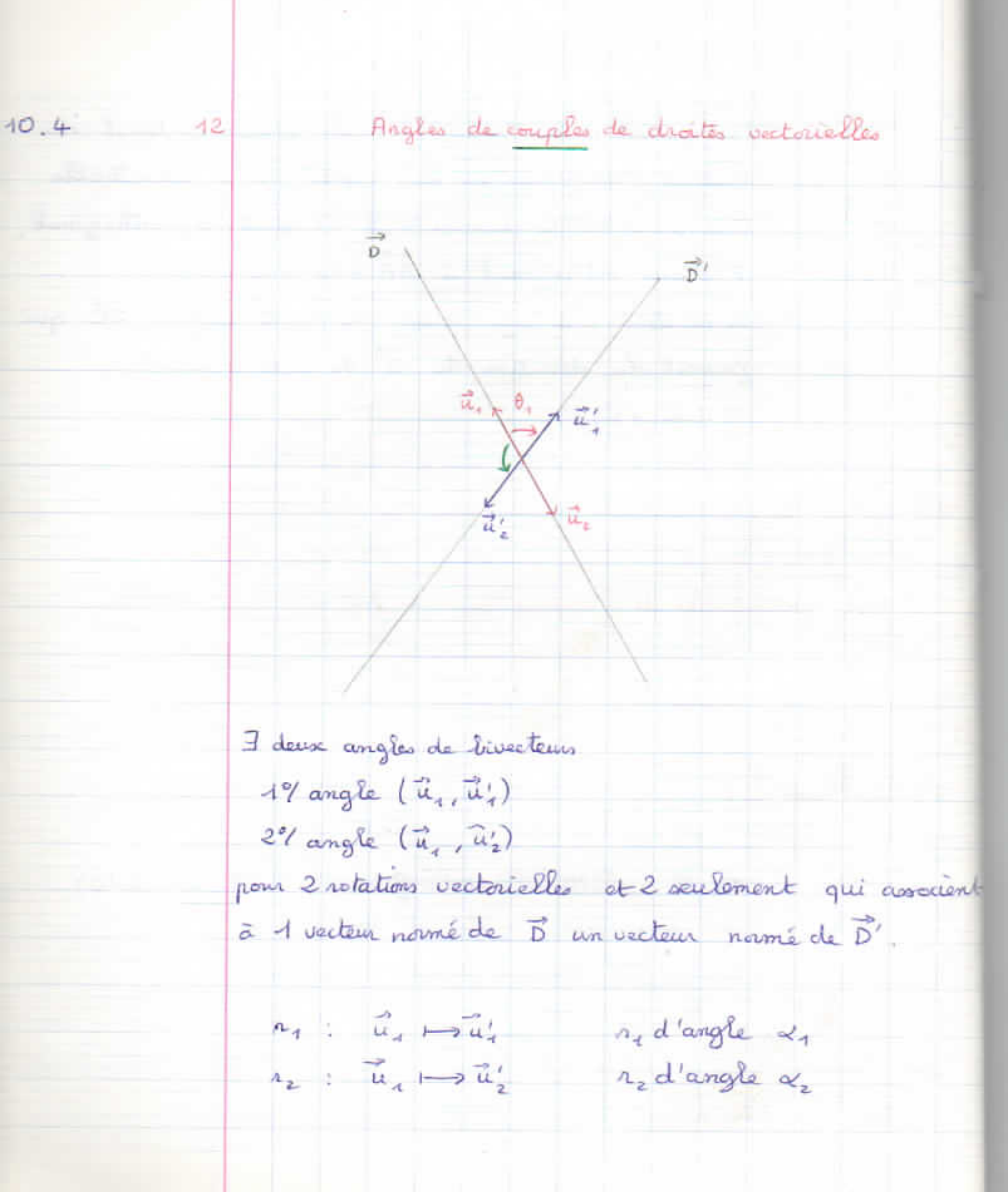
Orientation de l'espace E_3

Produit vectoriel

Toutes ces études sont à faire sur le livre. (C10)

10.4 12

Angles de couples de droites vectorielles



∃ deux angles de bivecteurs

1°/ angle $(\vec{u}_1, \vec{u}'_1)$

2°/ angle $(\vec{u}_1, \vec{u}'_2)$

pour 2 rotations vectorielles et 2 seulement qui associent à 1 vecteur normé de $\vec{D}$ un vecteur normé de $\vec{D}'$.

$r_1 : \vec{u}_1 \longmapsto \vec{u}'_1$ — r_1 d'angle α_1

$r_2 : \vec{u}_1 \longmapsto \vec{u}'_2$ — r_2 d'angle α_2

$\text{mes } \alpha_1 \equiv \theta_1 \ [2\pi]$

$\text{mes } \alpha_2 \equiv \theta_2 \ [2\pi]$ avec $\theta_2 = \theta_1 + \pi$

$$\boxed{\theta_2 - \theta_1 \equiv \pi \ [2\pi]}$$

Si $\vec{D}' = \vec{D}$, alors $\alpha_1 = \omega$, $\alpha_2 = p$

alors angle $(\vec{D}, \vec{D}') = \{\omega, p\}$

En général, si $\vec{D}' \neq \vec{D}$, angle $(\vec{D}, \vec{D}') = \dot{\alpha}_1$ = classe d'équivalence définie par :

$$\alpha \mathcal{R} \beta \mapsto \alpha - \beta \in \{\omega, p\} \quad \longleftarrow$$

Si $\alpha = \alpha_1$, alors $\beta = \alpha_1$ ou α_2

$$\dot{\alpha}_1 = \dot{\alpha}_2 = \{\alpha_1, \alpha_1 + p\}$$

11.4

$h : \underbrace{\mathcal{A}}_{\text{ens. des angles de vecteurs}} \longrightarrow \underbrace{\mathcal{A}'}_{\text{ens. des angles } \dot{\alpha}_1 \text{ de couples de droites}}$

$$\alpha_1 \longmapsto \dot{\alpha}_1$$

$$\alpha_2 = \alpha_1 + p \longmapsto \dot{\alpha}_1 = \dot{\alpha}_2$$

$$\left.\begin{array}{l} \omega \longmapsto \dot{\omega} \\ \omega + p \longmapsto \dot{\omega} \end{array}\right\} \text{él. neutre de } (\mathcal{A}', \dot{+})$$

Noyau $h = \{\omega, p\}$

$h' : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$

$\alpha \longmapsto \alpha + \alpha = \beta$

$\alpha + p \longmapsto (\alpha + p) + (\alpha + p) = \beta$ }

h' est un endomorphisme de $\mathcal{A}$, surjectif.

$i : \mathcal{A}' \longrightarrow \mathcal{A}$

$\dot{\alpha} \longmapsto \alpha + \alpha = \beta$

$\dot{\overline{\alpha + p}} = \dot{\alpha} \longmapsto (\alpha + p) + (\alpha + p) = \beta$

i = isomorphisme de $\mathcal{A}'$ sur $\mathcal{A}$

Bissectrices d'un couple de droites vectorielles

$\vec{B}$ bissectrice du couple $(\vec{D}, \vec{D}')$ si et seulement si
ordre

$$\text{angle}(\vec{D}, \vec{B}) = \text{angle}(\vec{B}, \vec{D}')$$

Or $(\vec{D}, \vec{B}) + \underbrace{(\vec{B}, \vec{D}')}_{(\vec{D}, \vec{B})} = (\vec{D}, \vec{D}')$

$\dot{\alpha} + \dot{\alpha} = \dot{\beta}$

$\text{mes}\, \dot{\alpha} + \text{mes}\, \dot{\alpha} = \text{mes}\, \dot{\beta}$

$\theta + k\pi + \theta + k\pi = \gamma + k'\pi \qquad (k, k') \in \mathbb{Z}^2$

$\vec{B} = \vec{B}_1$

$\vec{D}$

$\vec{D}'$

$\frac{\gamma}{2}$

$\vec{B}_2$

figure

Indications de lecture

chap 2 : C10 19 à 23

C10 116 à 119

C10 121 et 122

003 Géométrie

1 Espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$

2 Applications linéaires

3 Structures

4 Automorphismes involutifs de E, esp. vect. sur $\mathbb{R}$.

5 Projections vectorielles p.

6 Barycentres, espaces affines.

7 Applications affines.

8 Homothéties - translations.

9 Projections

10 Symétries

11 Transformations orthogonales

12 Angles de couples de droites vectorielles.